1. Le modèle de la corde élastique classique

1.1. Introduction:

Je m'intéresse ici à la notion de corde élastique classique tendue entre deux points fixes. Il existe un lien naturel entre la théorie de la relativité générale et celle des cordes dont la lecture de références scientifiques permet de prendre connaissance. L'approche exposée dans ces pages ne discute pas de ce lien ; ce qui ne signifie pas pour autant son absence de connexion avec la physique des particules.

En effet, le développement de la physique quantique a mis à mal la représentation ponctuelle et classique de celles-ci. Il semble aujourd'hui plus opportun de les décrire comme des tubes spatio-temporels en développement.

Comme tous les tubes possèdent a priori une certaine densité volumique de matière et subissent à cause de cela l'effet de phénomènes gravitationnels, je suis motivé à étudier la forme prise par une corde élastique tendue entre deux points fixes soumise à la seule action de sa masse dans le champ de pesanteur terrestre. Cette situation servira d'exemple didactique pour la suite.

1.2. Les conditions de l'expérience:

1.2.1. Définition de la corde élastique :

Une corde élastique est un objet matériel capable :

(i) de se déformer, c'est-à-dire de subir des modifications de ses dimensions (notamment et en particulier de sa dimension longitudinale) en réaction à des actions exogènes, et

(ii) de reprendre sa forme première, dite initiale au repos, sous l'effet de tensions internes liées à la nature de la matière dont elle est faite.

1.2.2. Les conditions initiales de l'expérience :

L'expérience la plus élémentaire consiste à considérer une corde élastique filiforme, assimilable à un cylindre déformable dont le diamètre se résout aux dimensions d'un point. C'est ce qu'on fera ici dans un premier temps pour se familiariser avec les cordes. Ces cordes filiformes ont l'avantage de pouvoir être assimilées à une succession discrète et continue de points. Mathématiquement, elles peuvent être vues comme des courbes dans un espace à deux, trois ou, pourquoi pas, quatre dimensions.

Il est connu que les cordes élastiques possèdent une limite supérieure d'élasticité et qu'au-delà d'une certaine contrainte, la déformation aboutit à la rupture du matériau. On supposera évidemment par commodité que cette limite n'est jamais atteinte dans le cadre des expériences décrites ici.

Soit donc une table plane et horizontale dont l'une des dimensions est donnée et égale à L. On suppose pour le besoin de l'expérience que cette table est encastrée exactement entre deux murs distants de L. Une corde élastique filiforme est disposée de manière rectiligne sur cette table et on suppose que la longueur au repos de celle-ci est de L. Elle est fixée sans tension à chacune de ses deux extrémités au mur qui encadre la table.

Dans les conditions dites de repos, la corde ne subit aucune tension, horizontale ou verticale, en aucun de ses points. En effet, la table sur laquelle elle repose compense exactement en chacun de ses points la tension verticale que son propre poids pourrait engendrer. Le fait qu'elle ne subisse du coup aucune tension externe annule de facto les tensions horizontales de rappel qu'elle aurait manifesté sinon.

L'étude menée ci-dessous se propose de découvrir la forme prise par la corde lorsque la table est retirée.

1.3. Analyse de la situation:

1.3.1. Le préjugé :

L'expérience et le sens commun enseignent que la forme adoptée par cette corde dans les conditions décrites ci-avant correspond essentiellement à la forme qu'elle adopte du fait de la pesanteur terrestre et de son aptitude à se déformer (en rapport avec sa constitution).

Assez fréquemment, les cordes utilisées permettent de se rendre compte que la forme obtenue est celle dite d'une chaînette tendue entre O et M (les deux points d'attache de la corde).

Pour ne cependant pas préjuger de ce résultat de l'observation, on va s'astreindre à un raisonnement très général.

1.3.2. Méthodologie :

La corde est donc supposée avoir une forme quelconque tout en commençant en O et tout en finissant en M, sans interruption (la limite d'élasticité n'est pas dépassée et la corde n'est pas rompue) -elle est donc continue-.

On supposera qu'il n'y a pas de vent et donc que la déformation de la corde se fait uniquement dans le plan défini par la corde au repos et le plan vertical à celle-ci. Moyennant toutes ces précautions, il est possible d'assimiler la corde à une fonction numérique réelle continue, f(x), définie sur l'intervalle [0, L].

Le segment de droite [O, M] peut être séparé en N segments de longueurs égales à Δx. De sorte que bien entendu:
(1)

$$L = N.\ \Delta x$$

Ces segments vont être considérés comme les projections horizontales selon un axe vertical des différents arcs curvilignes décrits par la corde au cours de son trajet entre O et M. Ces petits segments curvilignes sont limités, grâce à un découpage conventionnel, par les points M(i) et M(i+1) sachant que M(i = 0) = O et M(i = N) = M.

Il faut maintenant analyser les forces qui s'exercent sur chacun de ces segments curvilignes et comment elles s'exercent.

1.3.3. Analyse des forces :

Chaque segment subit, du fait de sa propre masse et du fait qu'il est plongé dans le champ de pesanteur terrestre, une force verticale, appliquée à peu près en son milieu, dirigée de haut en bas et d'une intensité donnée par :
(2)

$$P(i\ i+1) = \rho(i,i+1).\ \Delta L(i,i+1).\ g(i,i+1)$$

Où :
$\rho(i,i+1)$ représente la densité linéaire moyenne de matière de la corde sur le segment curviligne [M(i), M(i+1)] ;
$\Delta L(i,i+1)$ représente la longueur du segment curviligne [M(i), M(i+1)] ;
g(i,i+1) représente l'intensité du champ de pesanteur terrestre sur le segment curviligne [M(i), M(i+1)].

Cette action a pour effet essentiel de déplacer l'ensemble des points de la corde vers le bas (approximativement vers le centre de la terre en fait) et, du fait qu'elle possède deux points fixes en O et M et qu'elle est élastique, de créer une force de rappel à l'extrémité de chacun des segments curvilignes en laquelle il est possible de décomposer sa forme réelle.

L'extrémité M(i) subit une tension $\mathbf{T}^{+}(i)$ tangente à f en ce point qui tend à la ramener vers M(i+1) et une tension $\mathbf{T}^{-}(i)$ tangente à f en ce point qui tend à la ramener vers M(i-1).
Par ailleurs, l'extrémité M(i+1) subit une tension $\mathbf{T}^{+}(i+1)$ tangente à f en ce point qui tend à la ramener vers M(i) et une tension $\mathbf{T}^{-}(i+1)$ tangente à f en ce point qui tend à la ramener vers M(i).
Chaque segment curviligne [M(i), M(i+1)] subit donc l'action de trois forces : $\mathbf{P}(i,i+1)$, $\mathbf{T}^{+}(i)$ et $\mathbf{T}^{-}(i+1)$. Deux d'entre elles, $\mathbf{T}^{+}(i)$ et $\mathbf{T}^{-}(i+1)$, ont tendance à exercer une sorte de couple sur ses extrémités.

1.3.4. Les conditions de l'équilibre :

Au bout d'un moment, l'équilibre est atteint, la corde s'immobilise dans une nouvelle position de repos.
Lorsque N est très grand il est raisonnable de considérer que ces trois forces s'exercent approximativement en un seul point qu'on peut supposer être le milieu du segment curviligne [M(i), M(i+1)].
La condition suivante y est donc approximativement remplie:
(3)

$$\forall\ i:\ \mathbf{P}(i,i+1) + \mathbf{T}^{+}(i) + \mathbf{T}^{-}(i+1) = \mathbf{0}$$

1.3.5. Analyse des conditions de l'équilibre :

On va maintenant projeter l'équation d'équilibre obtenue précédemment sur les axes horizontaux et verticaux du repère des discussions. Ceci permet d'obtenir les deux équations :
(3.x)

$$T^{+}(i).\cos(\theta_i) - T^{-}(i+1).\cos(\theta_{i+1}) = 0$$

(3.y)

$$-P(i,i+1) + T^{+}(i).\sin(\theta_i) - T^{-}(i+1).\sin(\theta_{i+1}) = 0$$

De la relation (3.y) on tire :
(4)

$$-P(i,i+1) + T^{+}(i).\cos(\theta_i).\tg(\theta_i) - T^{-}(i+1).\cos(\theta_{i+1}).\tg(\theta_{i+1}) = 0$$

L'utilisation de la relation (3.x) dans la relation (4) fournit alors:
(5)

$$-P(i,i+1) + T^{+}(i).\cos(\theta_i).[\tg(\theta_i) - \tg(\theta_{i+1})] = 0$$

En injectant la relation (2) dans cette relation (5) :
(6)

$$-\rho(i,i+1).\Delta L(i,i+1).g(i,i+1) + T^{+}(i).\cos(\theta_i).[\tg(\theta_i) - \tg(\theta_{i+1})] = 0$$

On sait par ailleurs que dans les conditions habituelles, c'est-à-dire dans celles offertes à la surface de la terre sous l'influence de la pesanteur, le calcul des longueurs repose sur l'emploi du théorème de Pythagore :
(7)

$$\Delta L(i,i+1) = \int [1 + f'^{2}(x)]^{1/2}.\,dx, \text{ entre } M(i) \text{ et } M(i+1)$$

Pour alléger l'écriture il est intéressant de poser :
(8)

$$u(x) = [1 + f'^{2}(x)]^{1/2}$$

Ceci permet de réécrire la relation (7) :
(9)

$$\Delta L(i,i+1) = \int u(x).\,dx, \text{ entre } M(i) \text{ et } M(i+1)$$

Mais ceci permet surtout de faire une intégration par partie à répétition sur cette relation. On obtient ainsi :
(10)

$$\Delta L(i,i+1) = \sum_{p=1\ à\ N} (-1)^{p-1}.x^{p}.u^{p-1}(x)/(p)!] + 0(N)$$
entre M(i) et M(i+1)

Avec :
(11)

$$u^{(0)}(x) = u(x)$$

Il est ensuite possible de montrer qu'on peut toujours poursuivre avec :
(12)

$$\Delta L(i, i+1) = K(i, i+1).\Delta x$$

Où la fonction nouvelle K(x) introduite est du genre :
(13)

$$K(i,i+1) = u(x) + u'(x).\Delta x/2 - u''(x).(\Delta x)^{2}/6 + \ldots$$

Et où le développement exact dépendant du degré d'approximation souhaité.

Par conséquent, on arrive ainsi doucement à :
(14)

$$- \rho(i,i+1).\ K(i,i+1).\ \Delta x.\ g(i,i+1) + T^{+}(i).\ \cos(\theta_i).\ [f'[M(i)] - f'[M(i+1)]] = 0$$

Puis à :
(15)

$$-\rho(i,i+1).\ K(i,i+1).\ g(i,i+1) + T^{+}(i).\ \cos(\theta_i).\ [f'[M(i)] - f'[M(i+1)]]/\Delta x = 0$$

Le passage à la limite lorsque l'intervalle Δx devient infiniment petit fournit alors :
(16)

$$\mathrm{Lim}_{\Delta x \to 0}\{(15)\} = - \rho(x).\ u(x).\ g(x) + T^{+}(i).\ \cos(\theta_i).\ f''(x) = 0$$

Plus exactement, en remplaçant u(x) par son expression dans la limite obtenue ci-dessus :
(17)

$$- \rho(x).\ [1 + f'^{2}\ (x)]^{1/2}.\ g(x) + T_x.\ f''(x) = 0$$

Où on a posé :
(18)

$$T_x = T^{+}(i).\ \cos(\theta_i)$$

La relation (17) est très intéressante. Elle donne le lien entre la pente locale de la fonction f(x) décrivant la forme de la corde élastique tendue entre deux points fixes, sa densité linéaire, la valeur locale du champ de pesanteur à laquelle elle est soumise et la tension horizontale existant au bout de la corde. On peut encore l'écrire sous la forme suivante qui permet d'isoler l'élément local de densité linéaire de poids (le numérateur de terme de droite) :
(19)

$$f''(x) / [1 + f'^{2}(x)]^{1/2} = \rho(x).\ g(x) / T_x = F(x)$$

Rapport de la densité linéaire de poids à la tension linéaire

Dans les zones où la géométrie reste euclidienne par approximation (hypothèse ayant permis de faire appel à la relation (7) pour calculer la longueur d'un élément infinitésimal de longueur de corde), on peut finalement interpréter ce résultat général en disant que la forme f(x) de la corde va dépendre principalement du rapport entre sa densité linéaire de poids et la tension horizontale de rappel qu'elle subit. C'est un résultat facilement admissible par le bon sens.

1.4. Recherche des formes de la corde :

1.4.1. Recherche des pentes de la corde :

Il s'agit d'intégrer la relation (19) ; il vient :
(20)

$$\int F(x).dx = \mathrm{Log}\{f'(x) + (1 + f'^{2}(x))^{1/2}\} + \text{constante}$$

D'où il résulte :
(21)

$$\text{Arc sh}(f'(x)) = \int [\rho(x).\ g(x)/T_x].\ dx + c^{te}\ \text{d'intégration}$$

On vient donc de mettre en évidence, non pas encore la forme exacte de la corde, mais celle de la tangente en chacun de ses points et cela rapproche évidemment singulièrement du résultat recherché.

En calculant le sinus hyperbolique de la relation (21) il vient encore :
(22)

$$f'(x) = sh\ \{\int(\rho(x).\ g(x)/T(x)).dx\} + constante$$

L'intégrale d'un sinus hyperbolique est en principe un cosinus hyperbolique. Cette affirmation générale laisse augurer du fait connu que la forme de la corde élastique tendue entre deux points fixes est bien une chainette. Un calcul précis ne pourra être entrepris qu'en connaissant les caractéristiques internes de la corde et celles du champ de pesanteur entre 0 et L.

© Thierry PERIAT.