

## TD 23 - Probabilités

$\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels.  $n, N, r$  désignent des entiers naturels.  
 $(\Omega, P)$  désigne un espace probabilisé fini.  $A, B, C, A_1, \dots, A_n$  désignent des événements.

### I Espaces probabilisés

- 1** Exprimer  $P(A \cup B \cup C)$  en fonction des probabilités de  $A, B, C$  et de leurs intersections.
- 2** On pose  $\alpha = P(A \cap B)$ ,  $\beta = P(A \cap \bar{B})$ ,  $\gamma = P(\bar{A} \cap B)$ ,  $\delta = P(\bar{A} \cap \bar{B})$ .
1. Montrer  $P(A \cap B) - P(A)P(B) = \alpha\delta - \beta\gamma$ .
  2. Montrer  $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$ .
- 3**
1. On lance simultanément deux dés équilibrés à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir
    - (a) un double ?
    - (b) une somme des deux dés égale à 9 ?
    - (c) un minimum des deux dés égal à 4 ?
  2. On lance cinq fois un dé équilibré à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois un nombre pair ?
  3. On lance simultanément trois dés équilibrés à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir au final un 1, un 2 et un 4, dans n'importe quel ordre, ou bien trois chiffres de même parité ?
  4. On lance six fois un dé équilibré à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir chacun des numéros de 1 à 6 ?
- 4** Une urne contient 5 boules blanches, 5 boules rouges et 10 boules noires.
1. On effectue trois tirages successivement et avec remise. Calculer la probabilité que le tirage soit
    - (a) tricolore.
    - (b) bicolore.
    - (c) unicolore.
  2. On effectue trois tirages successivement et sans remise. Calculer la probabilité que le tirage soit
    - (a) tricolore.
    - (b) bicolore.
    - (c) unicolore.
  3. On tire simultanément trois boules. Calculer la probabilité que le tirage soit
    - (a) tricolore.
    - (b) bicolore.
    - (c) unicolore.
- 5** On considère un jeu de dominos équilibré (il contient un même nombre de dominos de chaque sorte). On tire sans remise du jeu deux dominos. Quelle est la probabilité qu'ils soient identiques ? Quelle est la probabilité qu'ils soient juxtaposables (qu'on puisse les placer côte à côte) ?
- 6** On pioche d'un seul coup 4 chaussettes dans un tiroir qui contient 12 paires de chaussettes différentes les unes des autres. Quelle est la probabilité d'obtenir
1. deux paires complètes ?
  2. au moins une paire complète ?

3. une paire et une seule complète ?

**7** On suppose  $0 \leq r \leq n - 2$ . On considère  $n$  personnes dont Monsieur D et Monsieur M. Quelle est la probabilité que qu'il y ait exactement  $r$  personnes entre Monsieur D et Monsieur M

1. Si les  $n$  personnes s'alignent dans une file ?
2. Si les  $n$  personnes se placent dans un cercle ?

(on suppose que toutes les répartitions des positions sont équiprobables).

**8** En négligeant les années bissextiles, quelle est la probabilité que  $r$  personnes aient leur anniversaire à des dates deux à deux distinctes ?

**9**

**10** Au bridge, chacun des 4 joueurs reçoit 13 cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité que chaque joueur reçoive un as ?

**11** On considère une urne contenant  $n$  jetons numérotés de 1 à  $n$ . On tire successivement et sans remise tous les jetons de l'urne. On dit qu'il y a record à un tirage donné si le numéro tiré est strictement supérieur à tous les numéros tirés précédemment (on convient qu'il y a toujours record au tirage 1).

1. Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , calculer la probabilité qu'il y ait record au tirage  $i$ .
2. Calculer la probabilité que, durant l'ensemble des  $n$  tirages, on assiste à
  - (a) un seul record ?
  - (b)  $n$  records ?
  - (c) exactement deux records ?

#### Approfondissement

**12** On tire  $n$  boules d'une urne qui contient  $N$  boules de  $k$  couleurs différentes :  $N_1$  boules de couleur  $c_1$ ,  $N_2$  boules de couleur  $c_2, \dots, N_k$  boules de couleur  $c_k$ , avec  $(N_1, \dots, N_k) \in \mathbb{N}^k$ . Pour  $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ , quelle est la probabilité d'obtenir exactement  $n_1$  boules de couleur  $c_1$ ,  $n_2$  boules de couleur  $c_2, \dots, n_k$  boules de couleur  $c_k$  dans chacun des cas suivants :

1. On effectue des tirages successifs avec remise.
2. On effectue des tirages successifs sans remise.
3. On effectue un tirage simultané.

**13** On considère  $p$  et  $q$  deux entiers naturels tels que  $p > q$ .

1. On considère des chemins formés de déplacements successifs joignant des points de  $\mathbb{N}^2$ . Les seuls déplacements autorisés à partir d'un point  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  sont le passage de  $(n, m)$  à  $(n + 1, m)$  ou le passage de  $(n, m)$  à  $(n, m + 1)$ . On note  $(\Delta)$  la droite d'équation  $y = x$ .
  - (a) Pour  $(a, b, n, m) \in \mathbb{N}^4$ , combien y-a-t-il de chemins différents possibles pour aller de  $(a, b)$  à  $(a + m, b + n)$  ?
  - (b) Montrer, en utilisant une symétrie par rapport à la droite  $(\Delta)$ , que le nombre de chemins allant de  $(1, 0)$  à  $(p, q)$  et qui rencontrent la droite  $(\Delta)$  est égal au nombre de chemins allant de  $(0, 1)$  à  $(p, q)$ .
  - (c) En déduire que le nombre de chemins allant de  $(0, 0)$  à  $(p, q)$  qui ne rencontrent la droite  $(\Delta)$  qu'en  $(0, 0)$  est

$$\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}$$

2. Dans un scrutin, il y a  $p$  bulletins pour le candidat  $P$  et  $q$  bulletins pour le candidat  $Q$ . Calculer la probabilité que le candidat  $P$  soit toujours en tête au fur et à mesure du dépouillement.

## II Probabilités conditionnelles

- 14** On suppose que chaque enfant qui naît a 1 chance sur 2 d'être un garçon. Madame B. a 4 enfants.
1. Quelle est la probabilité qu'elle ait 4 garçons, sachant que l'aîné est un garçon ?
  2. Quelle est la probabilité qu'elle ait 4 garçons, sachant qu'elle a au moins un garçon ?
- 15** Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement et sans remise 4 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches puis 2 boules noires dans cet ordre ?
- 16** Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire successivement 2 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire au deuxième tirage dans chacun des cas suivants ?
1. A l'issue du premier tirage, on remet la boule tirée dans l'urne avec une autre boule de la même couleur.
  2. A l'issue du premier tirage, si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne, mais, si elle est blanche, on ne la remet pas dans l'urne.
- 17** On dispose de 3 urnes  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$  et  $\mathcal{U}_3$  contenant chacune 2 boules noires et 3 boules blanches. On tire une boule de l'urne  $\mathcal{U}_1$  et une boule de l'urne  $\mathcal{U}_2$ , puis on les place dans l'urne  $\mathcal{U}_3$ . On tire alors une boule dans l'urne  $\mathcal{U}_3$ .
1. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules noires ?
  2. Quelle est la probabilité d'obtenir 1 boule blanche dans  $\mathcal{U}_3$  ?
  3. On a obtenu une boule blanche dans  $\mathcal{U}_3$ . Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une boule blanche dans  $\mathcal{U}_1$  et une boule blanche dans  $\mathcal{U}_2$  ?
- 18** Une maladie affecte une personne sur 10000. Un test sanguin permet de détecter cette maladie avec une fiabilité de 99% lorsqu'elle est effectivement présente. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0,1% des personnes saines testées.
1. Quelle est la probabilité que le test se trompe ?
  2. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif ?
- 19** On suppose  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une urne  $\mathcal{U}$  contient 1 jeton numéroté 1, 2 jetons numérotés 2, ...,  $n$  jetons numérotés  $n$ . On dispose de  $n$  autres urnes  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_n$ . Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , l'urne  $\mathcal{U}_k$  contient  $k$  boules blanches et  $n - k$  boules noires.
- On tire un jeton dans l'urne  $\mathcal{U}$ , puis, si le numéro du jeton est  $k$ , on tire une boule dans l'urne  $\mathcal{U}_k$ .
1. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit noire ?
  2. La boule tirée est blanche. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'urne 1 ?
- 20** On suppose  $n \in \mathbb{N}^*$  et on considère  $p \in ]0, 1[$ . Un bit est un signal informatique qui vaut 0 ou 1. Un canal de transmission transmet des bits selon le modèle suivant : il transmet fidèlement un bit avec probabilité  $p$  et de façon erronée avec probabilité  $1 - p$ . Un bit traverse des canaux successifs de ce type, et l'on suppose que chaque canal fonctionne indépendamment des autres. On note  $x_0$  le bit initial, et, pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $x_n$  le bit après la traversée de  $n$  canaux et  $p_n$  la probabilité que  $x_n$  soit égal à  $x_0$ .
1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , déterminer une relation entre  $p_{n-1}$  et  $p_n$ .
  2. En déduire, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$  et  $p$ .
  3. Déterminer la limite de la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- 21** On effectue des lancers successifs d'une pièce de monnaie équilibrée.
1. Quelle est la probabilité d'obtenir le  $n$ -ème FACE avant le  $n$ -ème PILE ?
  2. Quelle est la probabilité d'obtenir le  $n$ -ème FACE avant le  $n + 1$ -ème PILE ?
- 22** Une urne contient  $N$  boules dont  $b$  boules blanches et  $r$  boules rouges indiscernables au toucher. On tire successivement  $n$  boules de l'urne. A chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne, mais, si elle est rouge, on ne la remet pas dans l'urne.
1. Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?
  2. Quelle est la probabilité de tirer exactement 1 boule rouge ?

**23** On effectue des tirages successifs dans une urne qui contient  $n \in \mathbb{N}^*$  boules dont 1 boule rouge et les autres blanches. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A_n$  l'événement "la 1ère boule rouge arrive au  $n$ ème tirage" et  $B_n$  l'événement "la 2ème boule rouge arrive au  $n$ ème tirage". Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , déterminer  $P(A_n)$  et  $P(B_n)$  dans chacun des cas suivants :

1. On effectue le tirage sans remise.
2. A chaque tirage, on remet la boule dans l'urne avec une autre boule de la même couleur.
3. A chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on ne la remet pas dans l'urne, mais, si elle est rouge, on la remet dans l'urne.

**24** Un joueur effectue des lancers successifs d'une pièce de monnaie qui tombe sur PILE avec la probabilité  $p \in ]0, 1[$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A_n$  l'événement "le joueur gagne la partie exactement au  $n$ -ème lancer" et  $a_n$  sa probabilité. Déterminer  $a_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  dans chacun des cas suivants :

1. Le joueur gagne dès qu'il obtient le premier PILE.
2. Le joueur gagne au premier changement de résultat.
3. Le joueur gagne dès qu'il obtient deux PILE non nécessairement consécutifs.
4. Le joueur gagne dès qu'il obtient  $k \in \mathbb{N}^*$  PILES non nécessairement consécutifs.
5. Le joueur gagne dès qu'il obtient pour la première fois une séquence de 2 tirages consécutifs PILE-FACE dans cet ordre. On pourra exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ , de  $p$  et de  $n$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
6. Le joueur gagne dès qu'il obtient pour la première fois deux PILES consécutifs.  
On pourra exprimer  $a_{n+2}$  en fonction de  $a_{n+1}, a_n, p$  et  $n$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**25** Une puce se déplace sur les 3 sommets d'un triangle ABC. du plan. Au départ, à l'instant  $t = 0$ , elle est en A. A chaque instant  $n \in \mathbb{N}^*$ , elle fait un saut : si elle est en A, elle va en B ; si elle est en B, elle retourne en A avec probabilité  $\frac{1}{2}$  et va en C avec probabilité  $\frac{1}{2}$  ; si elle est en C, elle y reste. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , déterminer la probabilité que la puce arrive en C pour la première fois à l'instant  $2n$ .

*Approfondissement*

**26** On effectue des tirages successifs dans une urne qui contient  $b \in \mathbb{N}^*$  boules blanches et  $r \in \mathbb{N}^*$  boules rouges. Pour  $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , on note  $A_{k,n}$  l'événement "la  $k$ -ème boule rouge arrive au  $n$ ème tirage" et  $B_{k,n}$  l'événement "on a tiré exactement  $k$  boules rouges parmi les  $n$  tirages". Pour  $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , déterminer  $P(A_{1,n})$ , puis  $P(B_{k,n})$ , enfin  $P(A_{k,n})$  dans chacun des cas suivants :

1. On effectue le tirage sans remise.
2. A chaque tirage, on remet la boule dans l'urne avec une autre boule de la même couleur.
3. A chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne, mais, si elle est rouge, on ne la remet pas dans l'urne.
4. A chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on ne la remet pas dans l'urne, mais, si elle est rouge, on la remet dans l'urne.

**27** - **Urne de Polya.**

On effectue des tirages successifs dans une urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne avec  $c \in \mathbb{N}^*$  boules supplémentaires de la même couleur. Pour  $(r, b, n, m) \in (\mathbb{N}^*)^3$ , on note  $p_n(r, b)$  la probabilité d'obtenir une boule rouge au  $n$ -ème tirage et  $p_{m,n}(r, b)$  la probabilité d'obtenir des boules rouges aux  $m$ -ème et  $n$ -ème tirage en partant d'une urne initiale contenant  $b$  boules blanches et  $r$  boules rouges.

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge sachant que la seconde boule tirée est rouge ?
2. Pour  $(r, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , montrer

$$\forall n \geq 2, p_n(r, b) = \frac{r}{r+b} p_{n-1}(r+c, b) + \frac{b}{r+b} p_{n-1}(r, b+c)$$

3. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n(r, b) = \frac{r}{r+b}$$

4. Pour  $(r, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , en utilisant une méthode similaire, montrer

$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, 1 \leq m < n \implies p_{m,n}(r, b) = \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}$$

5. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , déterminer la probabilité qu'on ait tiré exactement  $k$  boules rouges parmi les  $n$  premiers tirages.

### III Indépendance

**28** On lance deux dés équilibrés. On considère les événements  $A$  : "le premier dé amène un nombre pair" ;  $B$  : "le second dé amène un nombre pair" ;  $C$  : "les deux dés amènent des nombres de même parité".

1. Montrer que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sont deux à deux indépendants.
2. Montrer que  $A$  et  $B \cap C$  ne sont pas indépendants, que  $A$  et  $B \cup C$  ne sont pas indépendants.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sont-ils mutuellement indépendants ?

**29** On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée. On considère les événements  $A$  : "on obtient FACE au premier lancer",  $B$  : "on obtient PILE au premier lancer" et  $C$  : "on obtient deux résultats différents aux deux lancers". Etudier l'indépendance des événements  $A$  et  $B$  puis des événements  $A$  et  $C$ .

**30** On suppose  $n \geq 2$ . On effectue  $n$  tirages successifs avec remise dans une urne qui contient 20 boules blanches et 20 boules noires. On considère les événements  $A_n$  : "on a obtenu au moins une boule de chaque couleur au cours des  $n$  tirages" et  $B_n$  : "on a obtenu au plus une boule blanche au cours des  $n$  tirages". Etudier l'indépendance des événements  $A_n$  et  $B_n$ .

**31** On suppose que  $A$  et  $B$  sont indépendants,  $A$  et  $C$  sont indépendants, et  $B \subset C$ . Montrer que  $A$  et  $C \setminus B$  sont indépendants.

**32** On suppose que, pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $A$  et  $B_i$  sont indépendants, et que  $B_1, \dots, B_n$  sont incompatibles deux à deux. Montrer que  $A$  et  $\bigcup_{i=1}^n B_i$  sont indépendants.

## IV Variables aléatoires

**33** On suppose  $n \in \mathbb{N}^*$ . On choisit  $X$  un entier au hasard entre 1 et  $2n$  (les choix possibles sont équiprobables).

1. Déterminer la loi de  $X$ .
2. Sans utiliser la loi de  $Y$ , déterminer  $E(Y)$ .
3. Déterminer la loi de  $Y = (-1)^X$ .

**34** Montrer qu'il existe une variable aléatoire  $X$  sur  $\Omega$  de support  $\llbracket 1, 9 \rrbracket$  telle que

$$\forall k \in \llbracket 1, 9 \rrbracket, P(X = k) = \log \left( 1 + \frac{1}{k} \right)$$

**35** On considère  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires sur  $\Omega$  dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant

$Y \setminus X$	0	1	2
1	1/4	1/8	1/8
-1	3/16	1/4	1/16

1. Déterminer les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .
2. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
3. On pose  $Z = XY$  ? Déterminer l'espérance de  $Z$ .

**36** Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On tire successivement 2 boules de l'urne et on note  $X$  le premier numéro tiré,  $Y$  le second. Déterminer la loi conjointe et les lois marginales de  $X$  et de  $Y$  dans le cas d'un tirage avec remise puis dans le cas d'un tirage sans remise. Les lois marginales de deux variables aléatoires déterminent-elles la loi du couple ?

1. Déterminer les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .
2. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
3. On pose  $Z = XY$  ? Déterminer l'espérance de  $Z$ .

**37** On considère  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer  $a \in \mathbb{R}$  tel qu'il existe une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  qui vérifie :  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = k) = ak$

**38** On dispose d'un dé truqué : il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ , la probabilité d'obtenir la face numérotée  $k$  est  $ak$ . On lance le dé et on note  $X$  le numéro de la face obtenue.

1. (a) Déterminer la valeur du réel  $a$ .
- (b) Déterminer la loi de  $X$ .
- (c) Déterminer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

2. On définit la variable aléatoire  $Y = \frac{1}{X}$ .

- (a) Sans utiliser la loi de  $Y$ , déterminer  $E(Y)$ .
- (b) Déterminer la loi de  $Y$ , retrouver en utilisant cette loi la valeur de  $E(Y)$ .

**39**  $X$  est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé  $(\Omega, P)$ . Pour  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$  tel que  $P(B) \neq 0$ , on note  $E(X \setminus A)$  l'espérance de  $X$  dans l'espace probabilisé  $(\Omega, P_X)$ .

1. Pour  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$  tel que  $P(B) \neq 0$ , donner une expression de  $E(X \setminus A)$ .
2. On suppose que  $(A_1, \dots, A_n)$  est un système complet d'événements. Montrer la formule de l'espérance totale :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n E(X \setminus A_k) P(A_k)$$

**40** On suppose  $n \geq 2$ . On dispose de  $n$  urnes numérotées de 1 à  $n$ . Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , l'urne  $U_k$  contient  $k$  boules numérotées de 1 à  $k$ . On choisit une urne au hasard (les choix sont équiprobables) et, dans celle-ci, on tire une boule au hasard (les boules sont équiprobables). On note  $X$  la variable aléatoire égale au numéro de l'urne tirée et  $Y$  la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Déterminer la loi conjointe du couple  $(X, Y)$  puis  $E(X)$  et  $E(Y)$ .

**41** On suppose  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . on effectue des tirages successifs dans l'urne sans remise. Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $N_k$  la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. On note  $X$  la variable aléatoire égale au plus grand numéro de tirage  $k$  tel que  $N_1 < \dots < N_k$ .

1. Montrer  $E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$ .
2. Déterminer  $E(X)$
3. Déterminer la loi de  $X$ .

**42**

1. Montrer que

$$1 - \mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{1}_{A_k})$$

2. En déduire

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{\bigcap_{k=1}^n A_{i_k}}$$

3. En déduire la formule du crible :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P\left(\bigcap_{k=1}^n A_{i_k}\right)$$

**43** On considère l'urne de Polya : on suppose  $(r, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ . On considère une urne qui contient  $r$  boules rouges et  $b$  boules blanches et on pose  $N = r + b$ . On effectue des tirages successifs dans l'urne. Après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne avec  $c$  boules supplémentaires de la même couleur. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées pendant de  $n$  premiers tirages et  $Y_n$  la variable indicatrice de l'événement "le  $n$ -ème tirage est une boule rouge".

1. Déterminer la loi de  $Y_1$ .
2. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, E(Y_{n+1}) = \frac{r + cE(X_n)}{N + nc}$$

3. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , exprimer  $X_n$  en fonction des variables  $(Y_k)_{1 \leq k \leq n}$ . En déduire que les variables  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ont la même loi.
4. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , déterminer l'espérance de  $X_n$ .

**44** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$f(x) = \begin{cases} -x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pour toute variable aléatoire  $X$  sur  $\Omega$  à valeurs dans un ensemble fini non vide  $E$ , on appelle entropie de  $X$  le réel

$$H(X) = \sum_{x \in E} f(P(X = x))$$

On considère  $E$  un ensemble fini non vide et  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$  à valeurs dans  $E$ .

1. Calculer  $H(X)$  dans les deux cas particuliers suivants :
  - (a)  $X$  est presque sûrement constante.
  - (b)  $X$  suit une loi uniforme.
2. (a) Montrer

$$\forall x \leq 0, f(x) \leq 1 - x$$

- (b) En déduire

$$\sum_{x \in E} f(NP(X = x)) \leq 0$$

- (c) Montrer

$$\sum_{x \in E} f(NP(X = x)) = -N \ln(N) + NH(X)$$

- (d) En déduire une majoration de  $H(X)$
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $X$  pour que
    - (a)  $H(X)$  soit minimale.
    - (b)  $H(X)$  soit maximale.
  4. On considère  $F$  un ensemble fini non vide et  $Y$  une variable aléatoire sur  $\Omega$  à valeurs dans  $F$ . On note  $Z = (X, Y)$ . Montrer que, si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $H(Z) = H(X) + H(Y)$ .

## V Lois usuelles

45

1. On suppose que  $X$  et  $Y$  sont des variables indépendantes qui suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs  $p$  et  $q$ . Déterminer la loi de  $XY$ , de  $1 - X$ , de  $X^2$ .
2. On suppose  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ . Déterminer la loi de  $Y = n - X$ .

46

$X$  et  $Y$  sont deux variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On pose  $U = X + Y$  et  $V = X - Y$ .

1. Déterminer la loi du couple  $(U, V)$  et les lois marginales de  $U$  et de  $V$ .
2. Déterminer l'espérance et la variance de  $U$  et de  $V$ .
3. Comparer  $E(UV)$  et  $E(U)E(V)$ .
4. Les variables  $U$  et  $V$  sont-elles indépendantes?

47

On considère  $B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1}, B_{2,2}$  des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$ , on pose  $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$  et  $r = rg(B)$ .

1. Déterminer la probabilité que  $B$  soit inversible. Pour quelle valeur de  $p$  cette probabilité est-elle maximale?
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $R$ .

48

1. Montrer

$$\forall (m, n, p) \in \mathbb{N}^3, \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$$

2.  $X$  et  $Y$  sont des variables indépendantes qui suivent des lois binomiales de paramètres respectifs  $(m, p)$  et  $(n, p)$ . Montrer que  $X + Y$  suit la loi binomiale de paramètre  $(m + n, p)$ .

49

On suppose  $n \geq 2$  et  $p \in ]0, 1[$ . Un secrétariat effectue  $n$  appels téléphoniques vers  $n$  personnes distinctes. Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est  $p$ . On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

Le lendemain, le secrétariat rappelle, dans les mêmes conditions, chacun des correspondants qu'il n'a pas réussi à joindre le premier jour. On note  $Y$  le nombre de correspondants obtenues au bout du fil pendant la deuxième journée, et on pose  $Z = X + Y$  le nombre total de correspondants obtenus.

1. Déterminer la loi conjointe de  $X$  et  $Y$ .
2. Montrer que  $Z$  suit une loi binomiale dont on précisera le paramètre.

50

Dans une expérience aléatoire, on considère un événement  $A$  de probabilité  $P(A) = p \in ]0, 1[$ . On répète successivement  $n$  fois l'expérience, les répétitions étant indépendantes. On note  $F_n$  la fréquence d'occurrence de l'événement  $A$ . Pour  $\epsilon > 0$ , montrer que  $P(|F_n - p| \geq \epsilon) \leq \frac{p(1-p)}{\epsilon^2}$ .

**51** On suppose  $N \geq 2$ . On effectue  $N$  tirages successifs avec remise dans une urne contenant  $n + 1$  boules numérotées de 0 à  $n$ , et on définit les suites de variables aléatoires  $(X_p)_{p \in \llbracket 1, N \rrbracket}$  et  $(Y_p)_{p \in \llbracket 1, N \rrbracket}$  de la manière suivante :

pour  $p \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $Y_p$  est le numéro de la boule tirée au  $p$ -ème tirage ;

$X_1 = 1$ , et, pour  $p \in \llbracket 2, N \rrbracket$ ,  $X_p$  prend la valeur 1 si le numéro obtenu au  $p$ -ème tirage n'a pas déjà été obtenu au cours des tirages précédents, et 0 sinon.

1. Déterminer la loi de  $X_2$ .

2. Montrer que, pour  $1 \leq p \leq N$ ,  $X_p$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{p-1}$  (on pourra utiliser le système complet d'événements associé à la variable aléatoire  $Y_p$ ).

3. Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$  tels que  $i < j$ . Montrer  $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$ .  $X_i$  et  $X_j$  sont-elles indépendantes ?

4. On note  $Z_N$  la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours de  $N$  tirages. Déterminer l'espérance de  $Z_N$ .

**52** On suppose  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $S_n$  est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre  $(n, p)$ , avec  $p \in ]0, 1[$ . On pose  $q = 1 - p$  et on considère  $x > 0$  donné.

1. Montrer

$$\forall \lambda > 0, P(S_n - np \geq nx) \leq \frac{E(e^{\lambda(S_n - np)})}{e^{n\lambda x}}$$

2. Montrer

$$\forall \lambda > 0, E(e^{\lambda(S_n - np)}) = (pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p})^n$$

3. Montrer

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^t \leq e^{t^2} + t$$

4. Montrer

$$\forall \lambda > 0, P(S_n - np \geq nx) \leq e^{n(\lambda^2 - \lambda x)}$$

5. Montrer

$$P(S_n - np \geq nx) \leq e^{-\frac{nx^2}{4}}$$

6. Justifier

$$P(S_n - np \leq -nx) \leq e^{-\frac{nx^2}{4}}$$

7. Démontrer l'inégalité de Bernstein :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq x\right) \leq 2e^{-\frac{nx^2}{4}}$$

*Approfondissement*

**53** On considère  $p \in ]0, 1[$ . Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine  $O$ . Au départ, à l'instant  $0$ , le mobile est à l'origine. Il se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse  $k$  à l'instant  $n$ , alors, à l'instant  $n + 1$ , il sera sur le point d'abscisse  $k + 1$  avec la probabilité  $p$  ou sur le point d'abscisse  $0$  avec la probabilité  $1 - p$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $X_n$  l'abscisse du point à l'instant  $n$ . On note  $T$  la variable aléatoire égale à l'instant non nul auquel le mobile se retrouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement de départ).

On admet qu'il existe un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  tel que  $T$  et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soient définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

1. (a) Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , exprimer  $(T = k)$  en fonction d'événements appartenant aux systèmes complets d'événements associés aux variables  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- (b) Déterminer la loi de  $T$ .
2. On considère  $n \in \mathbb{N}$ .
  - (a) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer  $X_n(\Omega)$ .
  - (b) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , pour  $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ , exprimer  $P(X_{n+1} = k)$  en fonction de  $P(X_n = k - 1)$ .
  - (c) Déterminer la loi de  $X_n$  (on déterminera successivement  $P(X_n = n)$ ,  $P(X_n = 0)$  et  $P(X_n = k)$ , pour  $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ ).
  - (d) Vérifier

$$\sum_{k \in X(\Omega)} P(X_n = k) = 1$$

3. Montrer

$$E(X_n) = \frac{p(1 - p^n)}{1 - p}$$

4. (a) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, E(X_{n+1})^2 = p(E(X_n)^2) + 2E(X_n) + 1$$

- (b) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$u_n = E(X_n)^2 + (2n - 1) \frac{n^{n+1}}{1 - p}$$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmético-géométrique.

- (c) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, V(X_n) = \frac{p}{(1 - p)^2} (1 - (2n + 1)p^n(1 - p) - p^{2n+1})$$