

Cours de mathématiques appliquées 1

Géométrie

Co-enseignants : Marc Battmann, Jean Baquié

Table des matières

1. Relations trigonométriques	2
2. Relations inverses	3
3. Développement limité	3
4. Relations dans un triangle quelconque	3
a. Loi du sinus avec démonstration formule	3
b. Loi du cosinus avec démonstration formule	4
5. Résolution de triangles	6
1 ^{er} cas	6
2 ^{ème} cas	7
3 ^{ème} cas	8
4 ^{ème} cas	12
6. Réflexion sur le calcul du gisement	13
7. L'arc capable	15

1. Relations trigonométriques

Cercle trigonométrique

Définition de sinus, cosinus et tangente

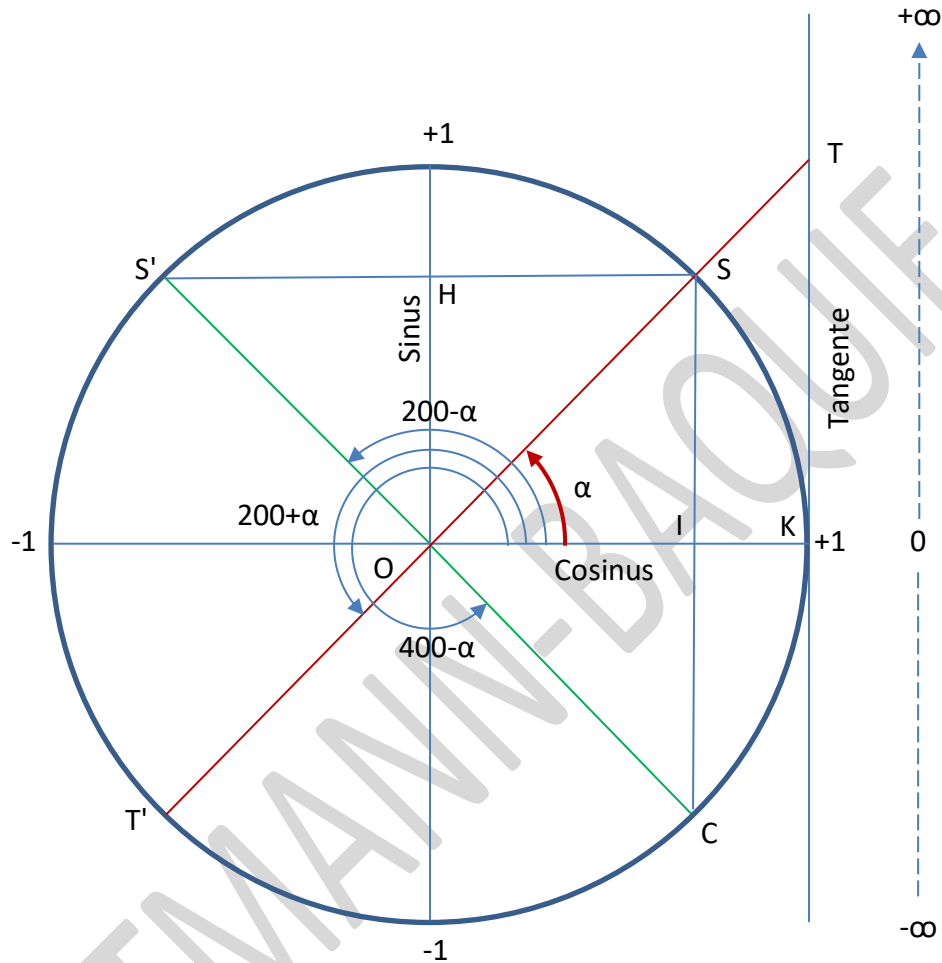


Figure 1 : Cercle trigonométrique

$$\sin \alpha = \frac{IS}{OS} = \frac{OH}{OS} = OH ; \sin \alpha = \sin(200 - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \frac{OI}{OS} = OI ; \cos \alpha = \cos(400 - \alpha)$$

$$\tan \alpha = \frac{KT}{OK} = KT ; \tan \alpha = \tan(200 + \alpha)$$

2. Relations inverses

Arc sinus, arc cosinus et arc tangente

ATTENTION 2 solutions



$$\alpha = \sin^{-1}(OH) ; 200 - \alpha = \sin^{-1}(OH)$$

Le même sinus donne deux solutions angulaires.

3. Développement limité

Développement limité de sinus, cosinus et tangente. Avec α en radian.

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \frac{\alpha^9}{9!} - \dots$$

Approximation : Lorsque les angles sont très petits c'est-à-dire inférieur à 1 gon nous pouvons faire les approximation suivantes :

$$\sin \alpha \approx \alpha ; \cos \alpha \approx 1 \text{ et } \tan \alpha \approx \alpha$$

Calcul et programmation sur Excel des développement limités.

4. Relations dans un triangle quelconque

a. Loi du sinus avec démonstration formule

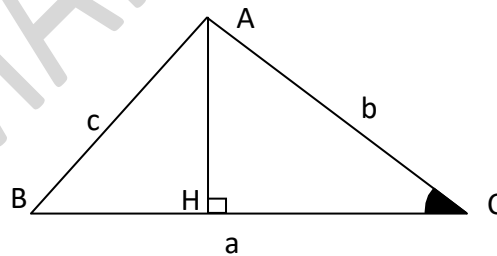


Figure 2 : Position des éléments dans un triangle

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Dans les triangles BAH et CAH : $AH = c \cdot \sin \hat{B} = b \cdot \sin \hat{C}$

D'où

$$\frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

b. Loi du cosinus avec démonstration formule

- Par la trigonométrie

Dans le triangle BAH : $c^2 = (a - b \cdot \cos \hat{C})^2 + (b \cdot \sin \hat{C})^2$

$$c^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C} + b^2 \cdot (\cos \hat{C})^2 + b^2 \cdot (\sin \hat{C})^2$$

$$c^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C} + b^2 \cdot ((\sin \hat{C})^2 + (\cos \hat{C})^2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

- Présentation de la puissance d'un point par rapport à un cercle

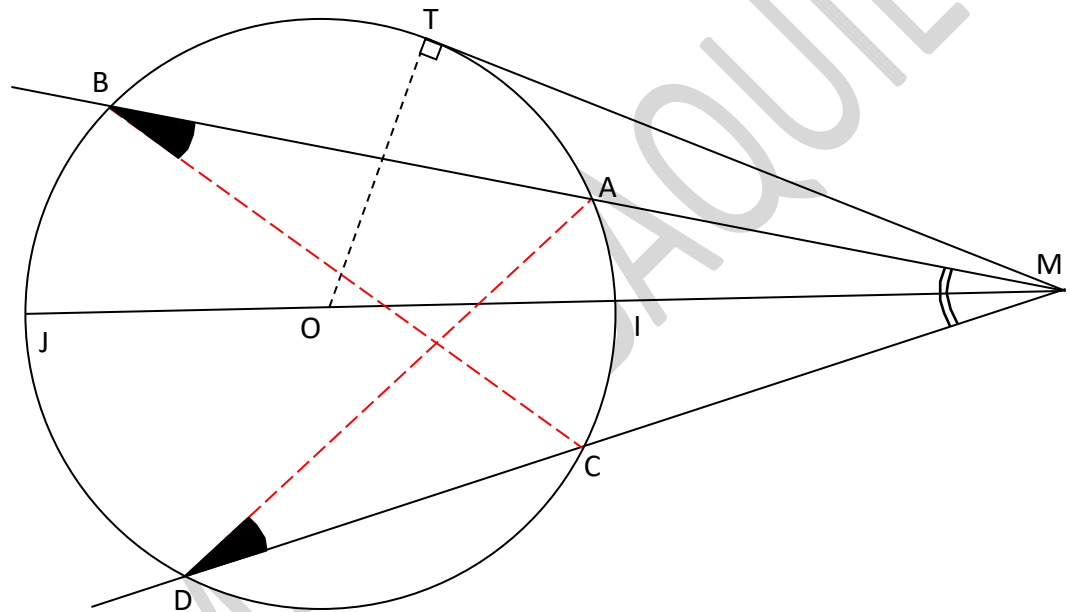


Figure 3 : Puissance d'un point par rapport à un cercle

Les triangles MBC et MDA sont homothétiques. Ils ont un angle commun $\widehat{BMD}$ et ont un angle égal $\widehat{MBC} = \widehat{MDA}$ car ces deux angles interceptent le même arc (Voir chapitre « arcs capables »).

Donc on peut écrire la relation des côtés.

$$\frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MA}$$

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD = C^{te}$$

En effet quelle que soit la demi-droite issue de M et coupant le cercle, le produit des segments entre M et les deux intersections avec le cercle est constant. Ce produit est appelé « la puissance du point par rapport au cercle ».

De même

$$\overline{MI} \cdot \overline{MJ} = (\overline{MO} - R) \cdot (\overline{MO} + R) = MO^2 - R^2 = MT^2 = C^{te}$$

D'où la démonstration par la puissance d'un point à une droite.

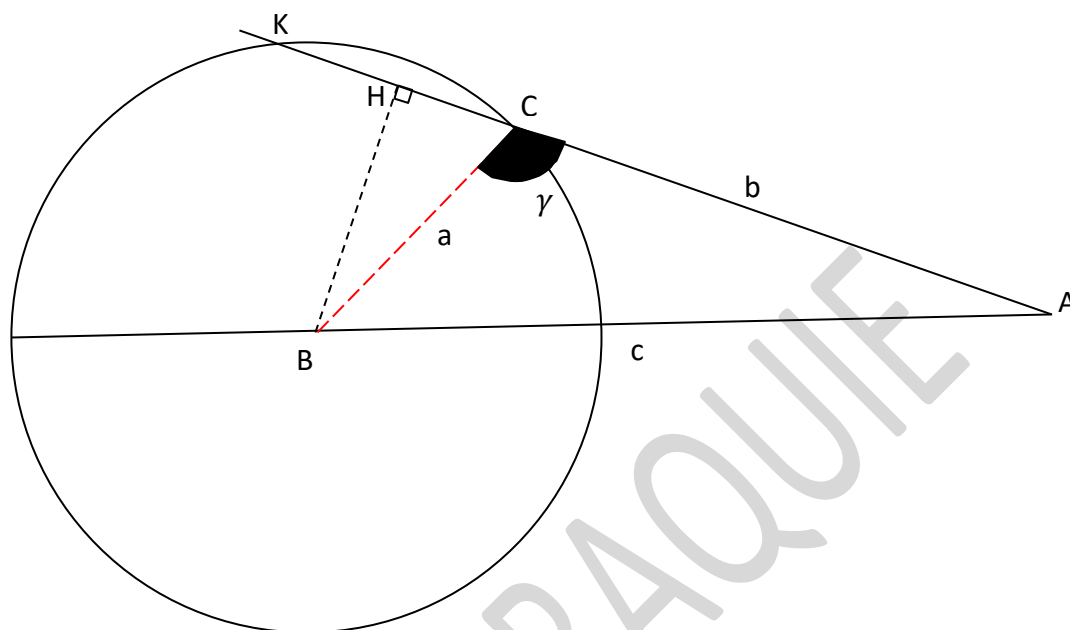


Figure 4 : Démonstration de la puissance d'un point

D'après les démonstrations précédentes

$$AB^2 - BC^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AK} = \overline{AC} \cdot (\overline{AC} + \overline{CK})$$

$$AB^2 - BC^2 = AC^2 + \overline{AC} \cdot \overline{CK}$$

$$\text{Or } \overline{CK} = 2 \cdot \overline{CH} = 2 \cdot \overline{BC} \cdot \cos(200 - \gamma) = -2 \cdot \overline{BC} \cdot \cos \gamma$$

D'où

$$AB^2 - BC^2 = AC^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \gamma$$

En ordonnant

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \gamma$$

Soit

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

5. Résolution de triangles

Un triangle comporte six éléments, trois cotés et trois angles. La somme des angles est de 200 gon (unité : le grade ; symbole : gon).

La résolution consiste à déterminer (calculer) trois éléments connaissant trois éléments mesurés sur le terrain ou calculés précédemment. Le nombre de cas possibles est de quatre sachant que la connaissance des trois angles ne permet pas de calculer les trois cotés. Il faut connaître absolument 1 côté pour donner l'échelle à la figure.

1^{er} cas

On connaît 1 côté et les 2 angles adjacents

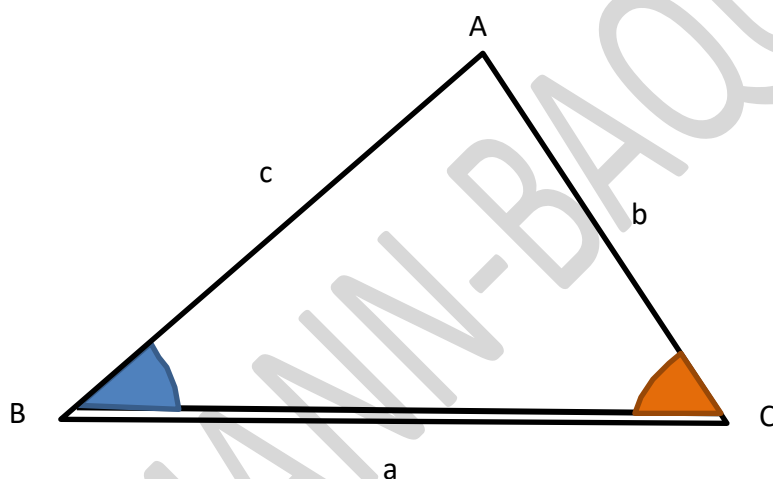


Figure 5: Résolution de triangles - Cas 1

Données	Calculs	Résultats
$a, \hat{B}, \hat{C}$	$\hat{A} = 200 - (\hat{B} + \hat{C})$	$\hat{A}$
	$b = \frac{a}{\sin \hat{A}} \cdot \sin \hat{B}$	b
	$c = \frac{a}{\sin \hat{A}} \cdot \sin \hat{C}$	c
	$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \hat{C}$	S

2^{ème} cas

On connaît 1 angle et les 2 cotés adjacents

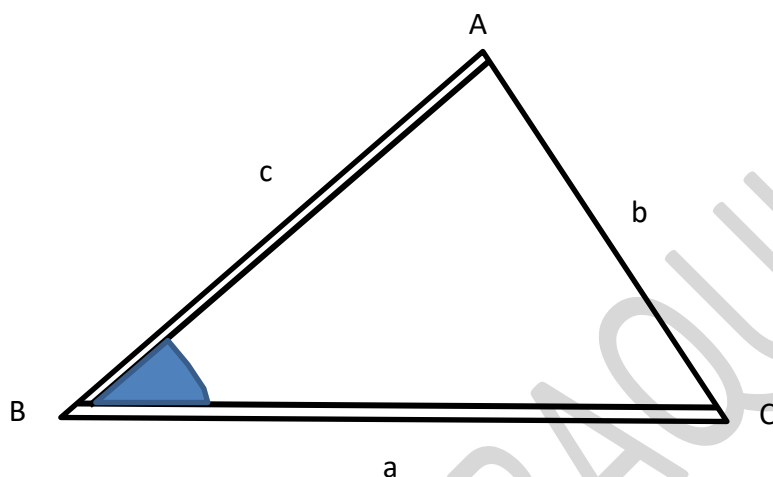


Figure 6 : Résolution de triangles - Cas 2

Données	Calculs	Résultats
$a, c, \hat{B}$	$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}}$	b
	$\hat{A} = \sin^{-1} \left(\frac{a}{b} \cdot \sin \hat{B} \right)$	$0 < \hat{A} \leq 100 \text{ ou } 100 < \hat{A} \leq 200$
	$\hat{C} = \sin^{-1} \left(\frac{c}{b} \cdot \sin \hat{B} \right)$	$0 < \hat{C} \leq 100 \text{ ou } 100 < \hat{C} \leq 200$
	$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \hat{C}$	S

Dans le choix des angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$ il y a une seule solution qui donne $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 200$

La deuxième possibilité est de calculer directement la bonne solution pour les angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$ en passant par la formule inverse d'Al Kashi.

Données	Calculs	Résultats
$a, c, \hat{B}$	$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}}$	b
	$\hat{A} = \cos^{-1} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \right)$	$\hat{A}$
	$\hat{C} = \cos^{-1} \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \right)$	$\hat{C}$
	$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \hat{C}$	S

Absolue nécessité de vérifier que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 200$

3ème cas

On connaît 1 angle, 1 coté adjacent et le côté opposé.

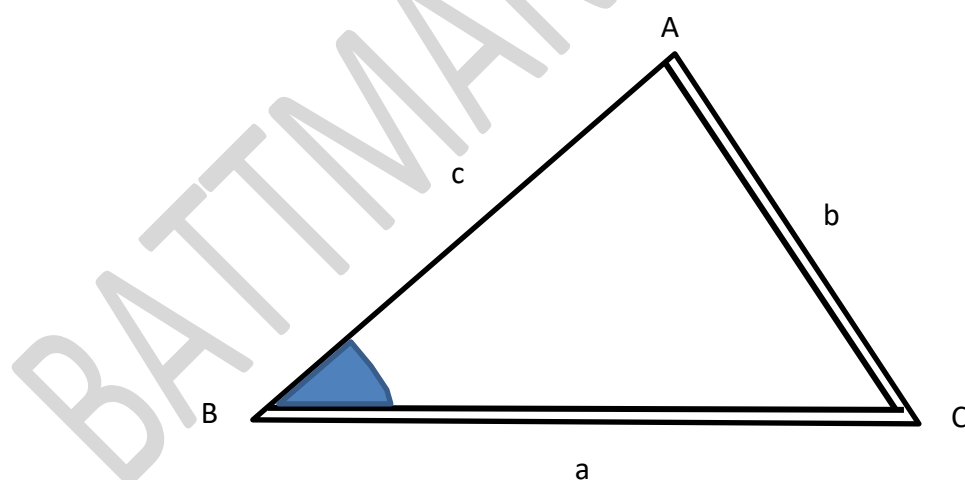


Figure 7 : Résolution de triangles - Cas 3

Données	Calculs	Résultats
$a, b, \hat{B}$	$\hat{A} = \sin^{-1} \left(\frac{a}{b} \cdot \sin \hat{B} \right)$	$0 < \hat{A} \leq 100$ ou $100 < \hat{A} \leq 200$
	$\hat{C} = 200 - (\hat{A} - \hat{B})$	$\hat{C}$
	$c = \frac{b}{\sin \hat{B}} \cdot \sin \hat{C}$	c
	$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \hat{C}$	S

On peut également utiliser la méthode d'Al Kashi :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

En ordonnant par rapport à l'inconnue (ici c) on peut donc calculer le côté c

$$c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B} + a^2 - b^2 = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré à une inconnue c. Donc calcul du discriminant réduit est :

$$\Delta' = a^2 \cdot \cos^2 \hat{B} + b^2 - a^2 = b^2 - a^2 \cdot (1 - \cos^2 \hat{B})$$

$$\Delta' = b^2 - a^2 \cdot \sin^2 \hat{B} = (b - a \cdot \sin \hat{B}) \cdot (b + a \cdot \sin \hat{B})$$

L'angle $\hat{B}$ étant obligatoirement compris entre 0 et 200gon, son sinus sera toujours positif donc $b + a \cdot \sin \hat{B}$ sera toujours positif.

Les solutions sont :

$$c = a \cdot \cos \hat{B} \pm \sqrt{\Delta'}$$

Le signe du discriminant sera donné par $b - a \cdot \sin \hat{B}$. Discussion :

$b < a \cdot \sin \hat{B}$	$\Delta' < 0$		0 solution	Pas réaliste
$b = a \cdot \sin \hat{B}$	$\Delta' = 0$: Solution $c = a \cdot \cos \hat{B}$			
	• $\hat{B} \geq 100$	• $c \leq 0$	0 solution	Pas réaliste
	• $\hat{B} < 100$	• $c > 0$	1 solution	Pas réaliste
$b > a \cdot \sin \hat{B}$	$\Delta' > 0$ Solution $c = a \cdot \cos \hat{B} \pm \sqrt{\Delta'}$			
	• $\hat{B} \geq 100 \Rightarrow a \cdot \cos \hat{B} \leq 0$			
	○ $ a \cdot \cos \hat{B} \geq \sqrt{\Delta'}$	• $c \leq 0 ; c' \leq 0$	0 solution	Pas réaliste ①
	○ $ a \cdot \cos \hat{B} < \sqrt{\Delta'}$	• $c > 0 ; c' \leq 0$	1 solution	OK ②
	• $\hat{B} < 100 \Rightarrow a \cdot \cos \hat{B} > 0$			
	○ $ a \cdot \cos \hat{B} \leq \sqrt{\Delta'}$	• $c > 0 ; c' \leq 0$	1 solution	OK ③
	○ $ a \cdot \cos \hat{B} > \sqrt{\Delta'}$	• $c > 0 ; c' > 0$	2 solutions	OK ④

Visualisation de 3 des 4 situations (la quatrième est la plus facile à interpréter).

① $\hat{B} \geq 100 ; |a \cdot \cos \hat{B}| \geq \sqrt{\Delta'}$

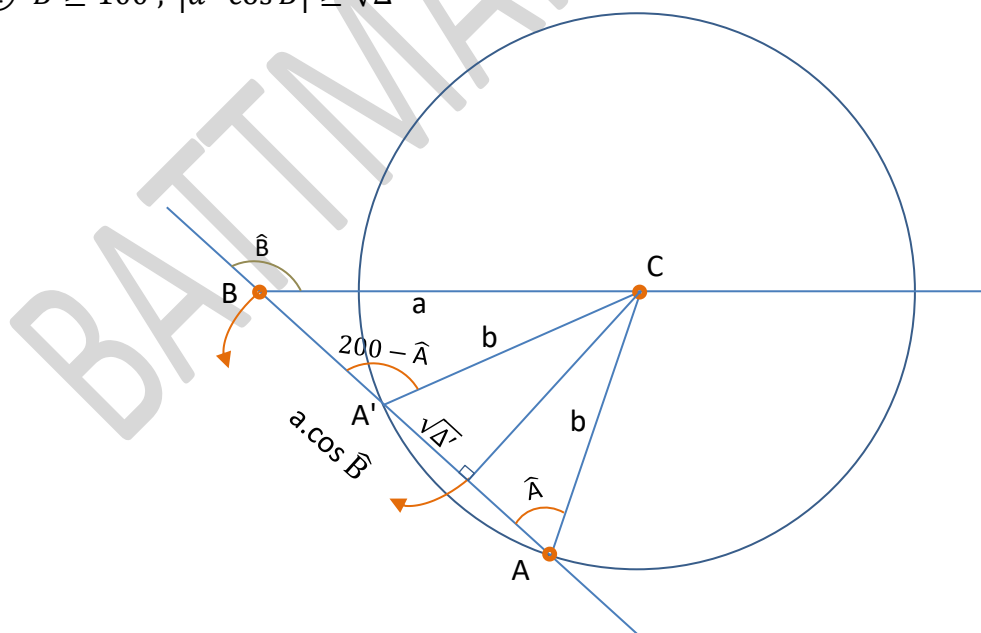


Figure 8 : Discussion 1

$$\textcircled{2} \hat{B} < 100^\circ ; |a \cdot \cos \hat{B}| < \sqrt{\Delta'}$$

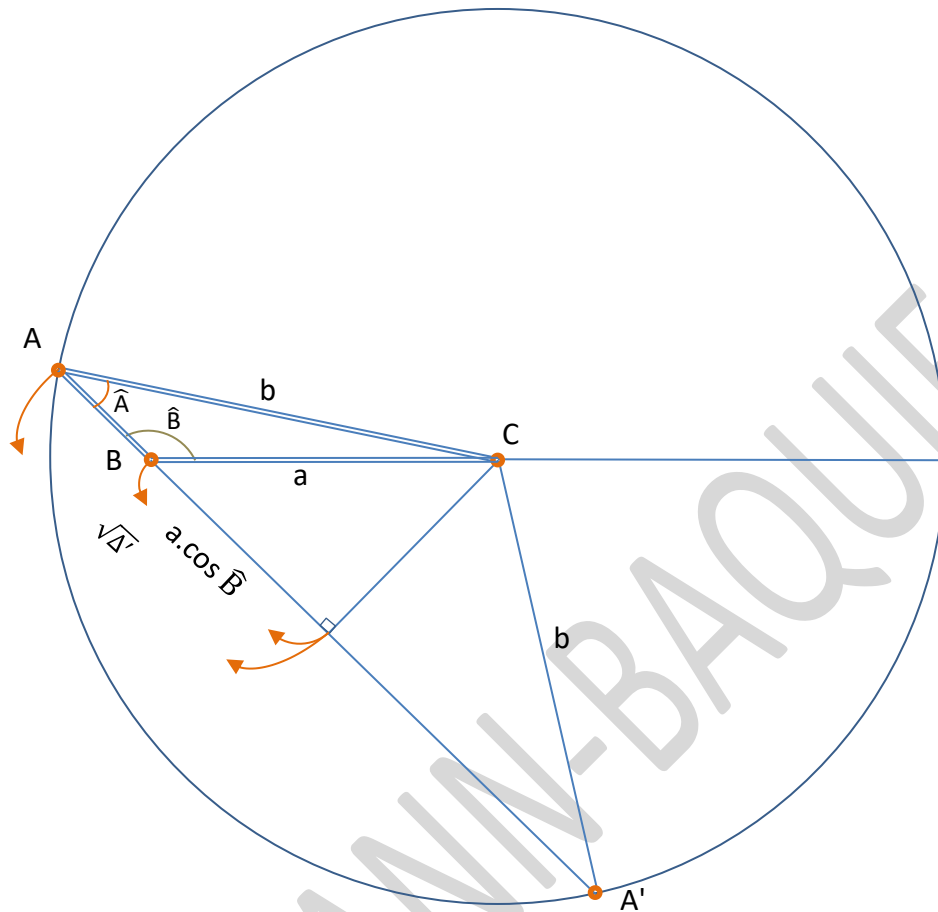


Figure 9: Discussion 2

$$\textcircled{3} \hat{B} \geq 100^\circ ; |a \cdot \cos \hat{B}| \leq \sqrt{\Delta'}$$

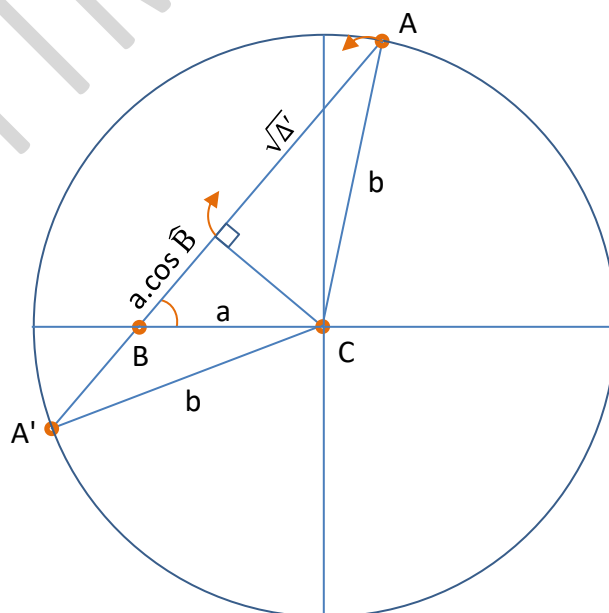


Figure 10 : Discussion 3

4^{ème} cas

On connaît les trois cotés

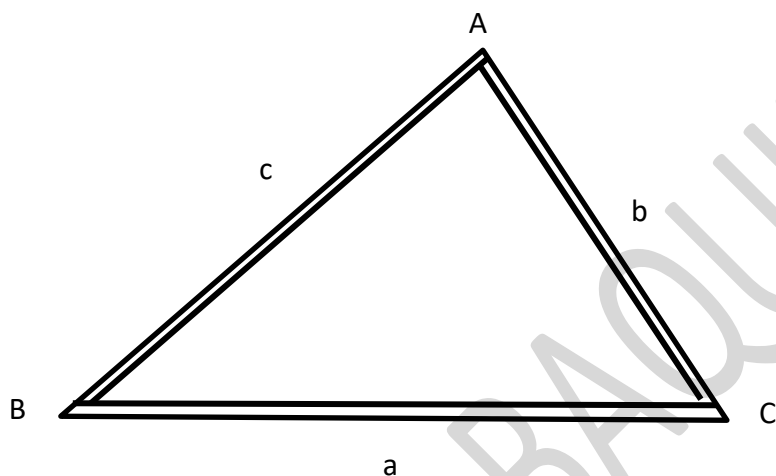


Figure 11 : Résolution de triangles - Cas 4

Données	Calculs	Résultats
a, b, c	$\hat{A} = \cos^{-1} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \right)$	$\hat{A}$
	$\hat{B} = \cos^{-1} \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \right)$	$\hat{B}$
	$\hat{C} = \cos^{-1} \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \right)$	$\hat{C}$
	$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \hat{C}$	S

Absolue nécessité de vérifier que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 200$.

6. Réflexion sur le calcul du gisement

D'abord donnons une définition du gisement :

C'est un angle compté entre une direction donnée et la direction Y du carroyage. Il est compté dans le sens horaire de 0 à 400 gons en partant de l'axe des ordonnées.

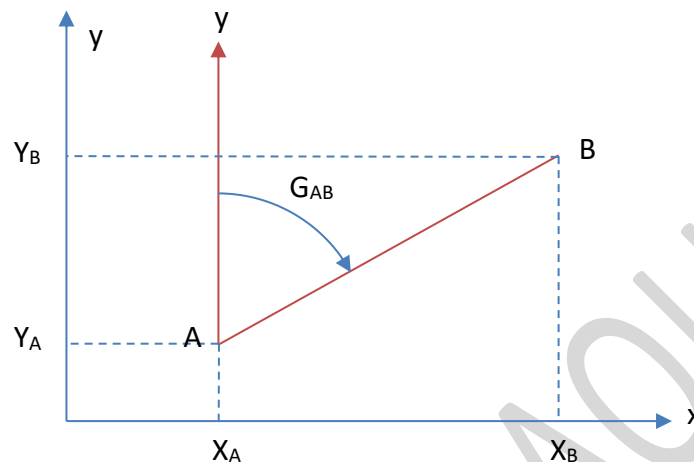


Figure 12 : Définition du gisement

La tangente du gisement est le rapport du côté opposé sur le côté adjacent.

$$\tan G_{AB} = \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}$$

Donc

$$G_{AB} = \text{Atan}\left(\frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}\right)$$

Mais il y a deux solutions pour la valeur de ce gisement. En effet

Nous allons aborder maintenant la façon de programmer ce calcul de gisement sur les tableurs.

En posant deux points A et B, nous cherchons le gisement G_{AB} et en mettant en correspondance les coordonnées de ces points avec de cellules :

		B	C
3		XA	YA
4		XB	YB

- 1^{ière} possibilité :

Le formule à utiliser dans le tableur est alors :

$$=\text{ATAN}((B4-B3)/(C4-C3))/\text{PI}()*200+200*((C4-C3)<0)+400*\text{ET}((B4-B3)<0;(C4-C3)>0)$$

Explications :

$$= \underbrace{\text{ATAN}((XB-XA)/(YB-YA))}_{1} \underbrace{/PI()*200}_{2} \underbrace{+200*((YB-YA)<0)}_{3} \underbrace{+400*ET((XB-XA)<0;(YB-YA)>0)}_{4}$$

Partie 1 : Calcul de base du gisement par l'Arc-Tangente.

Partie 2 : transformation de la valeur en radian à la valeur en grade.

Partie 3 : Test conditionnel, pour les quadrants 2 et 3 c'est-à-dire lorsque le ΔY est négatif, rajout de 200 gon.

Partie 4 : Double test conditionnel pour le quadrant 4 où le ΔX doit être négatif et le ΔY doit être positif d'où rajout de 400 gon. La fonction ET(valeur-logique1; valeur-logique2;.....) renvoie la valeur "Vrai" c'est-à-dire 1 si tous les arguments sont vrais. Si un seul est faux, le renvoi est "Faux" c'est-à-dire 0.

- 2^{ème} possibilité

Autre écriture toujours avec la fonction Arc-Tangente en utilisant la fonction Modulo (MOD) puisque la fonction tangente est périodique et permet de shunter le double test conditionnel.

$$=MOD(ATAN((B4-B3)/(C4-C3))/PI()*200+200*((C4-C3)<0);400)$$

- 3^{ème} possibilité

Deuxième type de formule avec la fonction Arc-Cosinus :

$$=ABS(2*PI()*((B4-B3)<0)-ACOS((C4-C3)/D4))/PI()*200$$

Je vous laisse décortiquer cette formule pour en comprendre le fonctionnement.

7. L'arc capable

Soit un cercle de centre O et 2 points fixes A et B appartenant au cercle et un point M quelconque de ce cercle.

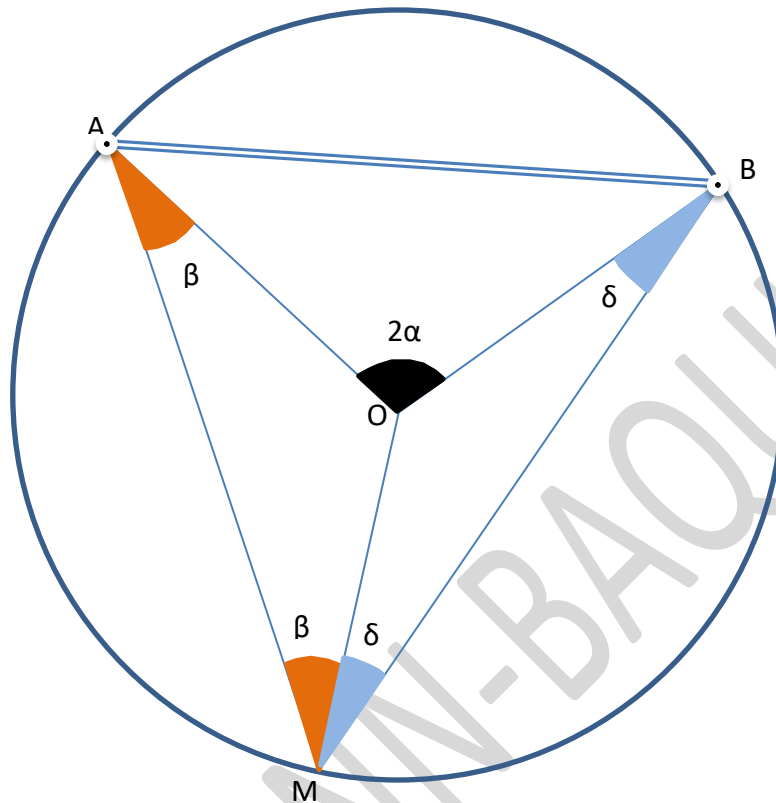


Figure 13 : Démonstration de l'arc capable

Posons l'angle $\widehat{AOB} = 2\alpha$

L'angle $\widehat{AOM} = 200 - 2\beta$ et l'angle $\widehat{BOM} = 200 - 2\delta$

Donc $400 - 2\alpha = 200 - 2\beta + 200 - 2\delta$

D'où $\alpha = \beta + \delta$

En conclusion :

- Quel que soit le point M, l'angle qui sous-tend l'arc AB et la moitié de son angle au centre : $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB} = 2\alpha$ et $\widehat{AMB} = \alpha$
- Quel que soit la position du point M sur le cercle, l'angle $\widehat{AMB}$ vaut toujours α et s'appelle l'arc capable.
- L'ensemble des points M définit un cercle de centre O et passant par les points A et B.

Notamment nous retrouvons l'angle α pour :

- L'angle supplémentaire de $\widehat{AMB}$ lorsque M est sur l'arc AB : $\widehat{AMB} = 200 - \alpha$

- b. L'angle formé pour le segment AB et la tangente BT au cercle en B (dessinée ci-dessous) et même la tangente au cercle en A (non dessinée) : $\widehat{ABT} = \alpha$

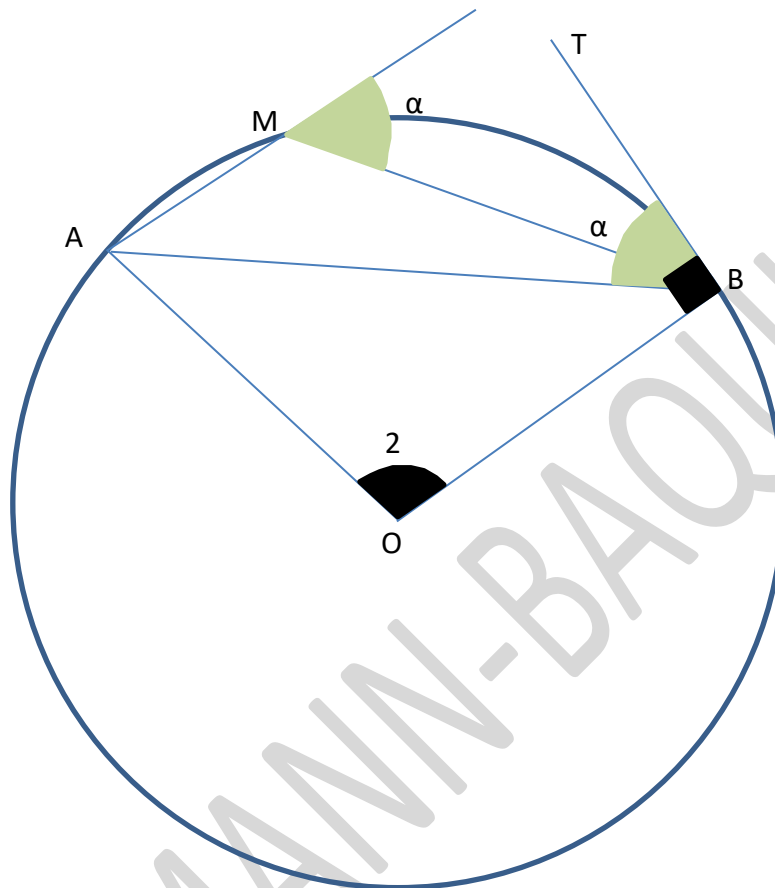
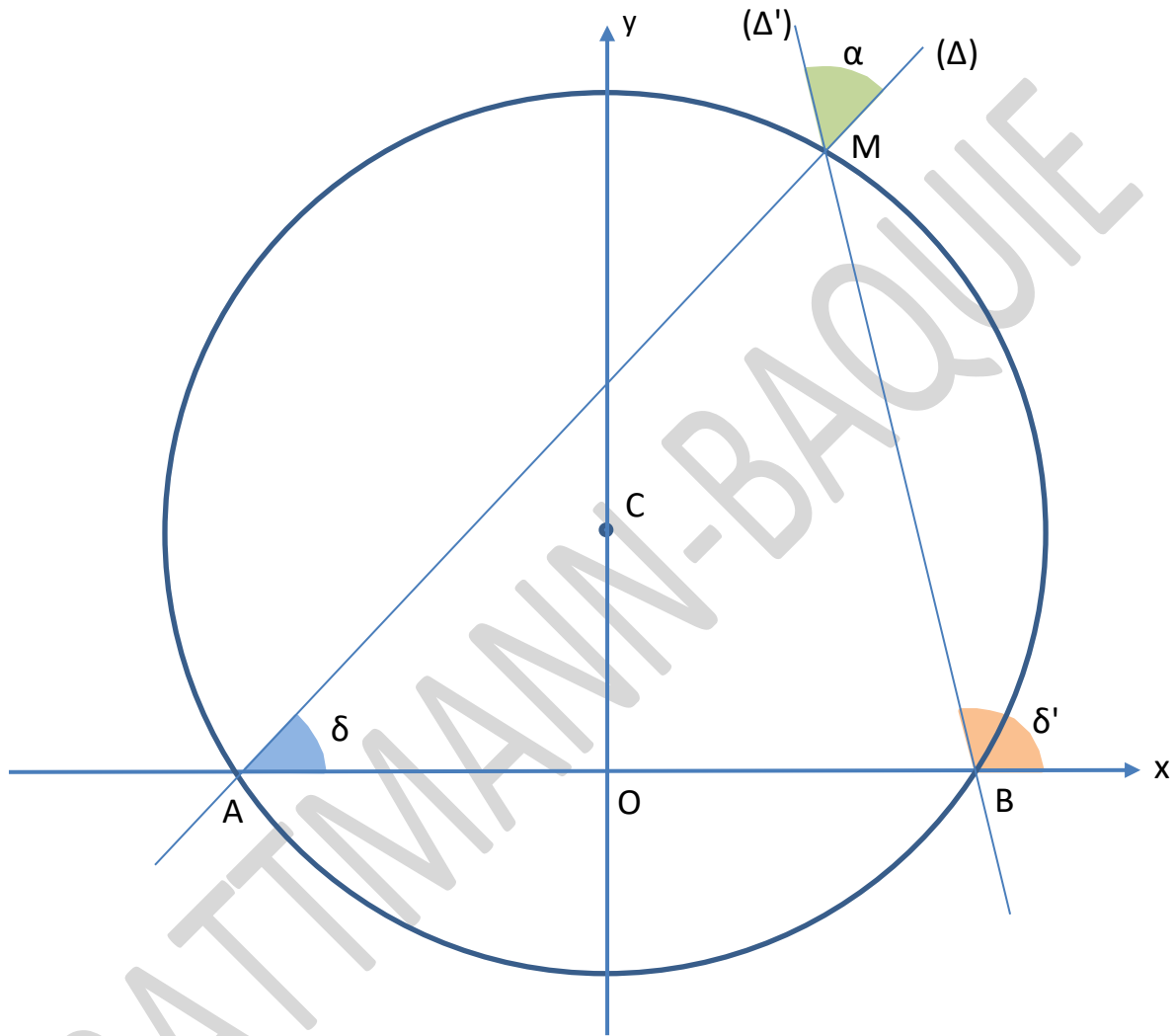


Figure 14 : L'arc capable (cas particuliers)

Autre démonstration :

Soient 2 points fixes A et B. Posons l'axe x suivant AB et l'axe y perpendiculaire à l'axe x au milieu de AB. Soient également 2 droites (Δ) et (Δ') tournant respectivement autour de A et de B. soit enfin M intersection de (Δ) et (Δ') de telle sorte $(\Delta, \Delta') = \alpha$ avec α constant.
 $AO = OB = a$



Les équations des droites

$$(\Delta) \quad y = m.(x+a) \quad \text{et} \quad (\Delta') \quad y = m'.(x-a)$$

Et $\alpha = \delta' - \delta$ donc en utilisant la relation trigonométrique

$$\tan \alpha = \tan(\delta' - \delta) = \frac{\tan \delta' - \tan \delta}{1 + \tan \delta \cdot \tan \delta'}$$

Or

$$m = \tan \delta = \frac{y}{x+a}$$

$$m' = \tan \delta' = \frac{y}{x - a}$$

D'où l'équation

$$\tan \alpha = \frac{\frac{y}{x - a} - \frac{y}{x + a}}{1 + \frac{y^2}{(x - a)(x + a)}} = \frac{y(x + a) - y(x - a)}{(x - a)(x + a) + y^2} = \frac{2 \cdot y \cdot a}{x^2 - a^2 + y^2}$$

Soit

$$x^2 + y^2 - \frac{2 \cdot y \cdot a}{\tan \alpha} - a^2 = 0$$

Ceci est l'équation d'un cercle dont les coordonnées du centre sont :

$$x = 0$$

$$y = \frac{a}{\tan \alpha}$$

Dans l'équation d'un cercle de la forme

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot a \cdot x - 2 \cdot b \cdot y + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

" $a^2 + b^2 - R^2$ " représente la puissance de l'origine O par rapport au cercle. Ici $-a^2$ est bien cette puissance puisqu'elle est le produit de a par -a.

Table des illustrations

Figure 1 : Cercle trigonométrique	2
Figure 2 : Position des éléments dans un triangle	3
Figure 3 : Puissance d'un point par rapport à un cercle	4
Figure 4 : Démonstration de la puissance d'un point	5
Figure 5: Résolution de triangles - Cas 1	6
Figure 6 : Résolution de triangles - Cas 2	7
Figure 7 : Résolution de triangles - Cas 3	8
Figure 8 : Discussion 1	10
Figure 9: Discussion 2	11
Figure 10 : Discussion 3	11
Figure 11 : Résolution de triangles - Cas 4	12
Figure 12 : Définition du gisement	13
Figure 13 : Démonstration de l'arc capable	15
Figure 14 : L'arc capable (cas particuliers)	16