Devoir libre n° 7
pour le 2 novembre 2026

Exercice 1.
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 t \arctan t \ dt$.
2. $\int_0^1 x \ln(1+x^2) \ dx$.
3. $\int_0^2 \frac{3x}{x^2+3x+2} \ dx$.
4. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \ dx$.
5. $\int_0^{\pi} 2x \sin(3x) \ dx$.
6. $\int_0^4 |x-2| \ dx$.
7. $\int_0^{1/2} \arcsin x \ dx$.
8. $\int_0^x \frac{t+3}{t^2-t+1} \ dt$.
9. $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} \ dx$.
10. $\int_0^{\pi} \cos(x) e^{-x} \ dx$.

Exercice 2.

1. (a) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \ dt$ est définie pour tout réel x.

On considère désormais la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \ dt$$

2. Établir que f est impaire.
3. (a) Montrer que la fonction $A : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \ dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
   (b) Exprimer, pour tout réel x, $f(x)$ en fonction de A puis en déduire que f est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

   (c) En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. (a) En utilisant la relation $t^2 \leq t^2+1 \leq t^2+2t+1$, valable pour tout t positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln 2$$

   (b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variation complet de f.
   (d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 3.
On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Démontrer que la suite (I_n) décroissante.
3. Démontrer que (I_n) converge.
4. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
5. Calculer I_3.