Devoir libre n° 7 - Corrigé

Exercice 1.

1. Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 t\arctan t\ dt$, on effectue une intégration par parties avec arctan et $t\mapsto\frac{t^2}{2}$ de classe C^1 sur $[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t\arctan t\ dt &= \left[\frac{t^2}{2}\arctan t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\ dt = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}\ dt \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(\int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\ dt\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x^2)\ dx$, on effectue une intégration par parties avec $x\mapsto\ln(1+x^2)$ et $x\mapsto x^2/2$ de classe C^1 sur $[0,1]$, on a :

$$\int_0^1 x\ln(1+x^2)\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\times\frac{2x}{1+x^2}\ dx = \frac{\ln 2}{2} - \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\ dx$$

Pour la dernière intégrale, on fait apparaitre $1+x^2$ au numérateur pour simplifier :

$$\frac{x^3}{1+x^2} = x\times\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$$

et on peut alors primitiver sans problème :

$$\int_0^1 x\ln(1+x^2)\ dx = \frac{\ln 2}{2} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{2\ln 2 - 1}{2}.$$

Deuxième option plus adroite : on pouvait aussi poser le changement de variable $u = 1+x^2$ avant de faire l'IPP, on a alors :

$$\int_0^1 x\ln(1+x^2)\ dx = \int_1^2 \sqrt{u-1}\ln(u)\times\frac{1}{2\sqrt{u-1}}\ du = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln(u)\ du$$

et on peut se passer de l'IPP si on connaît la primitive usuelle de ln :

$$\int_0^1 x\ln(1+x^2)\ dx = \frac{1}{2}\left[u\ln u - u\right]_1^2 = \frac{2\ln 2 - 2 - (1\ln 1 - 1)}{2} = \frac{2\ln 2 - 1}{2}.$$

3. Le dénominateur a un discriminant strictement positif (égal à 1) et pour racines -1 et -2, on peut donc le factoriser puis on décompose en éléments simples : il existe deux réels A et B tels que :

$$\frac{3x}{x^2+3x+2} = \frac{3x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

puis on trouve A et B par identification ou en multipliant par $(x+1)$ et en prenant $x=-1$ pour A, et de même pour B. On trouve

$$A = \frac{-3}{1} = -3 \quad \text{et} \quad B = \frac{-6}{-1} = 6$$

puis :

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{3x}{x^2+3x+2} &= -3\int_0^2 \frac{1}{x+1}\,dx + 6\int_0^2 \frac{1}{x+2}\,dx = -3\left[\ln(x+1)\right]_0^2 + 6\left[\ln(x+2)\right]_0^2 \\ &= -3\ln 3 + 6\ln 4 - 6\ln 2 = -3\ln 3 + 12\ln 2 - 6\ln 2 = 6\ln 2 - 3\ln 3.\end{aligned}$$

4. On fait apparaître une forme $\cos \times f(\sin)$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx &= \int_0^{\pi/2} \cos x(\cos^2 x)^2\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos x(1-\sin^2 x)^2\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos x(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\,dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx - 2\int_0^{\pi/2} \cos x\sin^2 x\,dx + \int_0^{\pi/2} \cos x\sin^4 x\,dx \\ &= \left[\sin x\right]_0^{\pi/2} - 2\left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{\sin^5 x}{5}\right]_0^{\pi/2} \\ &= 1 - 0 - 2\times\frac{1^3-0^3}{3} + \frac{1^5-0^5}{5} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{3}+\frac{1}{5} = \frac{8}{15}.\end{aligned}$$

Deuxième option plus maladroite : linéariser $\cos^5 t$: à l'aide de la formule d'Euler et de la formule du binôme, on obtient :

$$\cos^5 t = \frac{\left(e^{it}+e^{-it}\right)^5}{2^5} = \frac{\cos(5t)+5\cos(3t)+10\cos(t)}{16}$$

puis on sépare en trois intégrales, on toruve évidemment $8/15$ à la fin.

5. On réalise une intégration par parties pour faire disparaître x, qu'on dérive donc. Les fonctions $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto \frac{-\cos(3x)}{3}$ sont de classe C^1 sur $[0,\pi]$, on a donc :

$$\int_0^{\pi} 2x\sin(3x)\,dx = \left[-\frac{2x\cos(3x)}{3}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{3}\int_0^{\pi}\cos(3x)\,dx = -\frac{2\pi\times(-1)}{3} + \frac{2}{9}\left[-\sin(3x)\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{3}.$$

Deuxième option plus adroite : changer de variable avant l'IPP pour rendre la primitive plus simple : on pose $u = 3x$ et on a :

$$\int_0^{\pi} 2x\sin(3x)\,dx = \frac{2}{9}\int_0^{3\pi} u\sin(u)\,du = \frac{2}{9}\left(\left[-u\cos(u)\right]_0^{3\pi} + \int_0^{3\pi}\cos(u)\,du\right) = \frac{2}{9}(3\pi+0+0) = \frac{2\pi}{3}.$$

6. On sépare en $x = 2$:

$$\int_0^4 |x-2|\,dx = \int_0^2 (2-x)\,dx + \int_2^4 (x-2)\,dx = 4 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 - 4 = \frac{-4+0+16-4}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

7. On réalise une intégration par parties pour dériver arcsin : les fonctions $x \mapsto \arcsin x$ et $x \mapsto x$ sont de classe C^1 sur $[0,1/2]$, on a donc :

$$\int_0^{1/2} \arcsin x\,dx = \left[x\arcsin x\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

On pose alors le changement de variable $u = 1-x^2$:

$$\int_0^{1/2} \arcsin x\,dx = \frac{\arcsin(1/2)}{2} - 0 - \int_1^{3/4} -\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \frac{\pi}{12} - \left[\sqrt{u}\right]_{3/4}^1 = \frac{\pi}{12} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

8. Le discriminant du dénominateur est strictement négatif, on le met sous forme canonique pour faire apparaître une forme $1+u^2$:

$$t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\left[1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t-1/2)\right)^2\right]=\frac{3}{4}\left[1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$$

et on change de variable avec $u=\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$ donc $t=\frac{u\sqrt{3}+1}{2}$ et $dt=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

En posant pour alléger les bornes après le changement de variable $a=-1/\sqrt{3}$ et $b=\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{t+3}{t^2-t+1}\,dt &= \frac{4}{3}\int_0^x \frac{t+3}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dt\\
&= \frac{4}{3}\int_a^b \frac{\frac{u\sqrt{3}+1}{2}+3}{1+u^2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_a^b \frac{u\sqrt{3}+7}{1+u^2}\,dt\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\int_a^b \frac{u}{1+u^2}\,dt+7\int_a^b\frac{1}{1+u^2}\,dt\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right]_a^b+7\left[\arctan(u)\right]_a^b\right)\\
&= \frac{\ln(1+b^2)-\ln(1+a^2)}{2}+\frac{7}{\sqrt{3}}\big(\arctan(b)-\arctan(a)\big)\\
&= \frac{\ln\left(1+\frac{(2x-1)^2}{3}\right)-\ln(4/3)}{2}+\frac{7}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)-\arctan(-1/\sqrt{3})\right)\\
&= \frac{\ln\left(1+\frac{(2x-1)^2}{3}\right)-2\ln 2+\ln 3}{2}+\frac{7}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

On peut encore remarquer que :

$$\begin{aligned}
\ln\left(1+\frac{(2x-1)^2}{3}\right) &= \ln\left(\frac{3+4x^2-4x+1}{3}\right)=\ln(4x^2-4x+4)-\ln 3=\ln(4)+\ln(x^2-x+1)-\ln 3\\
&= 2\ln(2)-\ln(3)+\ln(x^2-x+1)
\end{aligned}$$

et on a donc :

$$\int_0^x \frac{t+3}{t^2-t+1}\,dt=\frac{\ln(x^2-x+1)}{2}+\frac{7}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{6}\right)$$

9. On effectue une intégration par parties, avec $x\mapsto\arctan x$ de classe C^1 sur $[0,1]$, on a alors :

$$\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx=\left[(\arctan x)^2\right]_0^1-\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$$

donc on reconnaît une intégration par parties "circulaire", on a alors

$$2\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx=\arctan(1)^2-\arctan(0)^2\quad\text{donc}\quad\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx=\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-0^2}{2}=\frac{\pi^2}{32}.$$

Autre option : on repère le fait que $1/(1+x^2)$ est la dérivée de $\arctan(x)$, donc on reconnaît une forme $u'\times u$ qu'on primitive en $\frac{u^2}{2}$ et on obtient la même chose.

10. On reconnaît un cas très classique : il faut réaliser deux intégrations par parties et retomber sur la même intégrale ; il plus simple est de primitiver l'exponentielle, et de changer de variable pour avoir e^u plutôt que e^{-x} et primitiver plus facilement : on pose $u = -x$, on a $x = -u$ et donc $dx = -du$ et on a :
$$\int_0^{\pi} \cos(x)e^{-x}\ dx = \int_0^{-\pi} \cos(-u)e^u \times (-du) = \int_{-\pi}^{0} \cos(u)e^u\ du$$
On réaliser une première intégration par parties en dérivant $\cos(u)$ et en primitivant e^u :
$$\int_{-\pi}^{0} \cos(u)e^u\ du = [\cos(u)e^u]_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0} \sin(u)e^u\ du = 1 + e^{-\pi} + \int_{-\pi}^{0} \sin(u)e^u\ du$$
On réaliser une deuxième intégration par parties en dérivant $\sin(u)$ et en primitivant e^u :
$$\int_{-\pi}^{0} \cos(u)e^u\ du = 1 + e^{-\pi} + [\sin(u)e^u]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} \cos(u)e^u\ du$$
On a retrouvé l'intégrale de départ, on la ramène de l'autre côté et on a :
$$2\int_{-\pi}^{0} \cos(u)e^u\ du = 1 + e^{-\pi} + 0$$
et enfin :
$$\int_{-\pi}^{0} \cos(u)e^u\ du = \frac{1 + e^{-\pi}}{2}.$$

Exercice 2.

1. (a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues, avec $t^2 + 1 \geq 1 \geq 0$ donc la racine existe bien, et $\sqrt{t^2+1} \geq \sqrt{1} = 1 > 0$ donc l'inverse existe bien.

   (b) On en déduit que pour tout x, la fonction est continue sur le segment $[x; 2x]$ ou $[2x; x]$ et l'intégrale est bien définie.

On considère désormais la fonction f définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\ dt$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrons que $f(-x) = -f(x)$:

   On applique le changement de variable $u = -t \iff t = -u$ à l'intégrale $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\ dt$:
   - Quand $t = -x$, $u = x$. Quand $t = -2x$, $u = 2x$.
   - $dt = -du$.

   On en déduit que :
$$f(-x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{(-u)^2+1}} \times (-1)\ du = -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\ du = -f(x)$$
   car les variables t et u sont muettes. La fonction f est donc impaire.

3. (a) On a vu que la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$, est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction A est alors une primitive de cette fonction : A est donc dérivable et :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ A'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(b) A étant une primitive de la fonction intégrée, on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = [A(t)]_x^{2x} = A(2x) - A(x)$$

et f est alors dérivable par opérations élémentaires. Enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2A'(2x) - A'(x) = 2 \times \frac{1}{\sqrt{(2x)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(c) On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{(4x^2+1)(x^2+1)}}.$$

Le dénominateur est strictement positif, on s'intéresse au numérateur :

$$2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+1} = \sqrt{4x^2+4} - \sqrt{4x^2+1} > 0$$

car $4 > 1$ donc $4x^2 + 4 > 4x^2 + 1$, et enfin la racine carrée étant strictement croissante, $\sqrt{4x^2+4} > \sqrt{4x^2+1}$.

On en déduit que $f'(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et enfin que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. (a) On passe l'encadrement donné par l'énoncé, qui ne concerne que des nombre strictement positifs puisque $t \geq x > 0$, à la racine carrée strictement croissante (avec t et $t+1$ strictement positifs pour la valeur absolue) puis à l'inverse strictement décroissante (tous les nombres sont strictement positifs), puis on intègre avec des bornes rangées dans l'ordre croissant ($x > 0$ donc $x + x = 2x > x$), on obtient :

$$|t| = t \leq \sqrt{t^2+1} \leq |t+1| = t+1 \quad \text{puis} \quad \frac{1}{t+1} \leq g(t) \leq \frac{1}{t} \quad \text{et enfin} \quad \int_x^{2x} \frac{1}{t+1} \leq f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t}.$$

On calcule ces deux intégrales :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+1}\,dt = [\ln|t+1|]_x^{2x} = \ln(2x+1) - \ln(x+1)$$

et

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt = [\ln|t|]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln 2 + \ln x - \ln x = \ln 2.$$

On en déduit finalement que :

$$\ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln 2.$$

(b) Le terme de droite de l'encadrement converge trivialement vers $\ln 2$, étudions celui de gauche :

$$\begin{aligned}\ln(2x+1) - \ln(x+1) &= \ln\left[2x\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right] - \ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \ln(2x) + \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) - \ln x - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ &= \ln x + \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) - \ln x - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

Par opérations usuelles, cette quantité converge vers $\ln 2$ lorsque x tend vers $+\infty$, et finalement par encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2.$$

(c) f est impaire donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\ln 2$, et finalement :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-\ln 2$ ↗	$\ln 2$

(d) f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-\ln 2;\ln 2[$ donc bijective et 0 admet un unique antécédent car il est dans l'intervalle d'arrivée.

De plus f est impaire donc $f(0)=0$, et cette unique solution est donc 0.

Exercice 3.
On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ I_n=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

1. On a
$$I_0=\int_0^1 dx=1$$
et
$$I_1=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\arctan(1)-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}.$$

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $I_n=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ et $I_{n+1}=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$.

Pour $x\in[0,1]$, on a $(1+x^2)\geq 1$ donc $(1+x^2)^{n+1}\geq(1+x^2)^n$, puis en passant à l'inverse décroissant et en intégrant avec des bornes dans l'ordre croissant on a $I_{n+1}\leq I_n$ et la suite (I_n) est donc décroissante.

3. La fonction intégrée est positive et les bornes dans l'ordre croissant donc la suite (I_n) est positive, donc minorée par 0 et décroissante : elle converge donc vers une limite positive ou nulle.

4. On effectue une intégration par parties dans I_n, en posant $u=\frac{1}{(1+x^2)^n}$ et $v=x$ qui sont de classe C^1 sur $[0,1]$, et on a :
$$I_n=\left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^1-\int_0^1 x\times 2x\times(-n)\times(1+x^2)^{-n-1}\,dx=\frac{1}{2^n}+2n\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx$$

On fait apparaitre $1+x^2$ au numérateur :

$$I_n=\frac{1}{2^n}+2n\int_0^1\frac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx=\frac{1}{2^n}+2n\left(\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^n}-\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right)=\frac{1}{2^n}+2n(I_n-I_{n+1})$$

Enfin on isole I_{n+1} (uniquement pour $n\geq 1$) :

$$2nI_{n+1}=\frac{1}{2^n}+2nI_n-I_n\quad\text{donc}\quad I_{n+1}=\frac{1}{n2^{n+1}}+\frac{(2n-1)}{2n}I_n.$$

5. On en déduit que
$$I_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}I_1=\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}=\frac{2+\pi}{8}$$
puis
$$I_3=\frac{1}{16}+\frac{3}{4}I_2=\frac{1}{16}+\frac{6+3\pi}{32}=\frac{8+3\pi}{32}.$$