Devoir libre n° 8 - Corrigé

Exercice 1.
Résoudre les équations suivantes :

1. Le trinôme admet pour discriminant :
$$\Delta = 4(1+i)^2 - 4i\left(2 - \frac{3}{2}i\right) = 4(1+2i+i^2) - 8i + 6i^2 = 8i - 8i - 6 = -6 = \left(i\sqrt{6}\right)^2$$
donc les solutions sonts :
$$z_1 = \frac{2(1+i) - i\sqrt{6}}{2i} = \frac{2i(1+i) - i^2\sqrt{6}}{2i^2} = -\frac{2i - 2 + \sqrt{6}}{2} = \frac{2 - \sqrt{6} - 2i}{2}$$
et
$$z_2 = \frac{2(1+i) + i\sqrt{6}}{2i} = \frac{2i(1+i) + i^2\sqrt{6}}{2i^2} = -\frac{2i - 2 - \sqrt{6}}{2} = \frac{2 + \sqrt{6} - 2i}{2}.$$
2. Via le changement de variable $Z = z - 1$, on résout l'équation $Z^2 - 2Z + i = 0$, de discriminant :
$$\Delta = 4 - 4i = 4(1-i) = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$
dont le nombre complexe $\delta = 2\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}$ est une racine carrée, et les solutions du trinôme sont donc :
$$Z_{1,2} = \frac{2 \pm \delta}{2} = 1 \pm \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}.$$
Enfin puisque $Z = z - 1$, les solutions de l'équation de départ sont :
$$z_1 = 1 + Z_1 = 2 + \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}} \quad \text{et} \quad z_2 = 1 + Z_2 = 2 - \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}.$$
3. (a) On résout l'équation sous forme algébrique, avec "l'astuce du module".

   On pose $\delta = a + ib$ avec a et b réels, on a alors :
$$\delta^2 = 8 - 6i \iff a^2 - b^2 + i \times 2ab = 8 - 6i \iff \left\{\begin{array}{c} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = -6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a^2 - b^2 = 8 \\ ab = -3 \end{array}\right.$$
   De plus, si δ est solution, $|\delta^2| = |8 - 6i| = \sqrt{64 + 36} = 10$, donc $|\delta|^2 = 10$, donc $a^2 + b^2 = 10$.

   En combinant avec $a^2 - b^2 = 8$, on trouve $a^2 = \frac{8+10}{2} = 9$ et $b^2 = \frac{10-8}{2} = 1$.

   On en déduit donc que $a \in \{-3, 3\}$ et $b \in \{-1, 1\}$, et comme on doit avoir $ab = -3$, a et b doivent être de signes opposés. Finalement, les deux seules solutions possibles sont $3 - i$ et $i - 3$; or tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées, donc $i - 3$ et $3 - i$ sont bien les deux racines carrées de $8 - 6i$.

   (b) On reconnaît un trinôme du second degré dont le discriminant Δ vaut :
$$\Delta = (2-i)^2 + \frac{(1+i)(3-7i)}{2} = 4 - 1 - 4i + \frac{3 + 7 + 3i - 7i}{2} = 3 - 2i + 5 - 2i = 8 - 6i = (3-i)^2$$
   d'après la question précédente, donc les racines sont $z_{1,2}\frac{(2-i)\pm(3-i)}{2(1+i)}$, qu'on peut simplifier :
$$z_1 = \frac{5 - 2i}{2(1+i)} = \frac{(5-2i)(1-i)}{4} = \frac{5 - 2 - 2i - 5i}{4} = \frac{3 - 7i}{4}$$
   et
$$z_2 = \frac{-1}{2(1+i)} = \frac{-(1-i)}{4} = \frac{i-1}{4}.$$

4. On isole z^n puis on utilise les racines n-ième de l'unité :

$$\begin{aligned}
\frac{3z^n-1}{2} = i - \frac{3}{2} &\iff z^n = \frac{2i-2}{3} = \frac{2}{3}(-1+i) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}e^{3i\frac{\pi}{4}} \\
&\iff z^n = \left(\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{1/n} e^{\frac{3i\pi}{4n}}\right)^n \\
&\iff \left(\frac{z}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{1/n} e^{\frac{3i\pi}{4n}}}\right)^n = 1 \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{1/n} e^{\frac{3i\pi}{4n}}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{1/n} e^{\frac{3i\pi}{4n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}.
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
(i-1)z^n - 4 = 0 &\iff z^n = \frac{4}{i-1} \iff z^n = \frac{4(-i-1)}{2} \iff z^n = 2(-1-i) \\
&\iff z^n = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \iff z^n = 2\sqrt{2}\ e^{i\frac{5\pi}{4}} \\
&\iff z^n = \left(\sqrt[n]{2\sqrt{2}}\ e^{i\frac{5\pi}{4n}}\right)^n \\
&\iff \left(\frac{z}{\sqrt[n]{2\sqrt{2}}\ e^{i\frac{5\pi}{4n}}}\right)^n = 1 \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z}{\sqrt[n]{2\sqrt{2}}\ e^{i\frac{5\pi}{4n}}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = \sqrt[n]{2\sqrt{2}}\ e^{i\frac{5\pi}{4n}}\ e^{\frac{2ik\pi}{n}}.
\end{aligned}$$

6. $(1+i)z^{n+1} = 4z \iff z\left[(1+i)z^n - 4\right] = 0 \iff z = 0$ ou $z^n = \frac{4}{1+i}$.

Or on a :

$$\frac{4}{1+i} = \frac{4(1-i)}{2} = 2(1-i) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

et on en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
z^n = \frac{4}{1+i} &\iff z^n = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \iff z^n = \left((2\sqrt{2})^{1/n}e^{-i\frac{\pi}{4n}}\right)^n \\
&\iff \left(\frac{z}{(2\sqrt{2})^{1/n}e^{-i\frac{\pi}{4n}}}\right)^n = 1 \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z}{(2\sqrt{2})^{1/n}e^{-i\frac{\pi}{4n}}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = (2\sqrt{2})^{1/n}e^{-i\frac{\pi}{4n}}e^{\frac{2ik\pi}{n}}
\end{aligned}$$

Les solutions sont donc 0 et les $(2\sqrt{2})^{1/n}e^{-i\frac{\pi}{4n}}e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.

7. $z^n + \frac{1}{z^n} = 1 \iff z^{2n} + 1 = z^n \iff (z^n)^2 - z^n + 1 = 0$.

Ce trinôme admet pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$. On a donc :

$$\begin{aligned}
z^n + \frac{1}{z^n} = 1 &\iff z^n = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad z^n = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \\
&\iff z^n = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad z^n = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\iff z^n = e^{-i\pi/3} \quad \text{ou} \quad z^n = e^{i\pi/3} \\
&\iff z^n = \left(e^{-i\pi/3n}\right)^n \quad \text{ou} \quad z^n = \left(e^{i\pi/3n}\right)^n \\
&\iff \left(\frac{z}{e^{-i\pi/3n}}\right)^n = 1 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{z}{e^{i\pi/3n}}\right)^n = 1 \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z}{e^{-i\pi/3n}} = e^{2ik\pi/n} \quad \text{ou} \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z}{e^{i\pi/3n}} = e^{2ik\pi/n} \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = e^{-i\pi/3n}\, e^{2ik\pi/n} \quad \text{ou} \quad \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = e^{i\pi/3n}\, e^{2ik\pi/n}.
\end{aligned}$$