Devoir libre n° 9
pour le 16 novembre 2026

Exercice 1.
Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' + y = 2x\cos x + \sin x$.
2. $y' - \sin(x)y = \frac{xe^{-\cos(x)}}{1+x^2}$.
3. $3(1+t^2)y' + \frac{5}{2}ty = 4t\sqrt{1+t^2}$.

Exercice 2.
Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$ et α, β deux réels. Le but de cet exercice est de calculer la somme suivante :

$$A_n = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}\sin(\alpha + k\beta)$$

A cet effet, on pose les polynôme P et Q et la somme S_n suivantes :

$$P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \quad , \quad Q : x \mapsto x^2P''(x) \quad , \quad S_n = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}e^{ik\beta}$$

1. Montrer que $S_n = Q\left(e^{i\beta}\right)$.
2. Donner une expression factorisée du polynôme P puis en déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{C},\ P''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}.$$
3. Montrer alors que :
$$S_n = n(n-1)e^{2i\beta}\left(1+e^{i\beta}\right)^{n-2}$$
puis en déduire que :
$$S_n = n(n-1)2^{n-2}\cos^{n-2}\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{i\frac{(n+2)\beta}{2}}.$$
4. Justifier que $A_n = \mathrm{Im}\left(e^{i\alpha}S_n\right)$ et en déduire que :
$$A_n = n(n-1)2^{n-2}\cos^{n-2}\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha + (n+2)\frac{\beta}{2}\right).$$