Devoir libre n° 9 - Corrigé

Exercice 1.
Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. On veut résoudre l'équation différentielle $y' + y = 2x\cos x + \sin x$.
Les solutions de $y' + y = 0$ sont :

$$y : x \mapsto Ae^{-x}, \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $f : x \mapsto (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x$, on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a\cos x - (ax+b)\sin x + c\sin x + (cx+d)\cos x$$

puis :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)+f(x) = (a+cx+d+ax+b)\cos x+(c-ax-b+cx+d)\sin x = [(a+c)x+a+b+d]\cos x+[(c-a)x+c+d-b]\sin$$

Pour que f soit solution, il suffit donc d'avoir :

$$\begin{cases} a+c=2 \\ a+b+d=0 \\ c-a=0 \\ c+d-b=1 \end{cases}$$

La troisième équation donne $c = a$, qu'on remplace dans la première pour obtenir $a = c = 1$, puis on a :

$$\begin{cases} a=1 \\ c=1 \\ b+d=-1 \\ d-b=0 \end{cases}$$

La dernière équation donne $d = b$, et on remplace dans la précédente pour obtenir $b = d = -1/2$ et enfin la fonction

$$f : x \mapsto \left(x - \frac{1}{2}\right)\cos x + \left(x - \frac{1}{2}\right)\sin x$$

est solution de $y' + y = 2x\cos(x) + \sin(x)$.

Enfin les solutions de $y' + y = 2x\cos x + \sin x$ sont :

$$y :\mapsto Ae^{-x} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\cos x + \left(x - \frac{1}{2}\right)\sin x \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

2. On veut résoudre l'équation différentielle $y' - \sin x y = \frac{xe^{-\cos x}}{1+x^2}$.
Les solutions de $y' - \sin(x)y = 0$ sont :

$$y : x \mapsto Ae^{-\cos x}\ , \text{ avec } A \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière par variation de la constante, sous la forme : $f : x \mapsto A(x)e^{-\cos x}$.
On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - \sin(x)f(x) = A'(x)e^{-\cos x} + A(x)\sin x e^{-\cos x} - \sin x A(x)e^{-\cos x} = A'(x)e^{-\cos x}$$

Pour que f soit solution, il suffit d'avoir $A'(x) = \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^2}$ et on peut donc prendre $A(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$: la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)e^{-\cos x}}{2}$$

est solution de $y' - \sin x y = \frac{xe^{-\cos x}}{1+x^2}$.

Enfin les solutions de $y' - \sin x y = \frac{xe^{-\cos x}}{1+x^2}$ sont :

$$y : x \mapsto Ae^{-\cos x} + \frac{\ln(1+x^2)e^{-\cos x}}{2} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

3. On veut résoudre l'équation différentielle $3(1+t^2)y' + \frac{5}{2}ty = 4t\sqrt{1+t^2}$.
Cette équation se réécrit :

$$y' + \frac{5t}{6(1+t^2)}y = \frac{4t}{3\sqrt{1+t^2}}$$

Les solutions de $y' + \frac{5t}{6(1+t^2)}y = 0$ sont :

$$y : t \mapsto Ae^{-\frac{5}{12}\ln(1+t^2)}, \quad \text{ou encore } y : t \mapsto \frac{A}{(1+t^2)^{5/12}} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière par variation de la constante, sous la forme $f : t \mapsto \frac{A(t)}{(1+t^2)^{5/12}}$.
On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \frac{A'(t)}{(1+t^2)^{5/12}} + A(t) \times 2t \times \frac{-5}{12}(1+t^2)^{-17/12}$$

puis :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) + \frac{5t}{6(1+t^2)}f(t) = \frac{A'(t)}{(1+t^2)^{5/12}} - \frac{5t}{6(1+t^2)^{17/12}} + \frac{5t}{6(1+t^2)^{17/12}} = \frac{A'(t)}{(1+t^2)^{5/12}}$$

donc pour que f soit solution, il suffit d'avoir :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{A'(t)}{(1+t^2)^{5/12}} = \frac{4t}{3\sqrt{1+t^2}} \quad \text{ou encore} \quad A'(t) = \frac{4}{3}t(1+t^2)^{-1/12}$$

et on peut donc prendre $A(t) = \frac{2}{3} \times \frac{(1+t^2)^{11/12}}{\frac{11}{12}} = \frac{24}{33}(1+t^2)^{11/12} = \frac{8}{11}(1+t^2)^{11/12}$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{8}{11}(1+t^2)^{11/12}(1+t^2)^{-5/12}$, ou encore $f : t \mapsto \frac{8}{11}\sqrt{1+t^2}$ est solution, et enfin les solutions de l'équation différentielle sont :

$$y : t \mapsto \frac{A}{(1+t^2)^{5/12}} + \frac{8}{11}\sqrt{1+t^2} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et α, β deux réels. Le but de cet exercice est de calculer les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(\alpha + k\beta) \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\beta}.$$

1. On calcule $Q\left(e^{i\beta}\right)$. On dérive deux fois P, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{C},\ P'(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times kx^{k-1} \quad \text{puis} \quad P'' = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k(k-1)X^{k-2}$$

On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{C},\ Q(x) = x^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k(k-1)x^{k}$$

et on en déduit bien que $Q\left(e^{i\beta}\right) = S_n$.

2. D'après le binôme de Newton, on a :

$$\forall x \in \mathbb{C},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = (x+1)^n$$

puis en dérivant deux fois :

$$\forall x \in \mathbb{C},\ P''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

3. On en déduit alors que

$$S_n = Q\left(e^{i\beta}\right) = e^{2i\beta} P''\left(e^{i\beta}\right) = e^{2i\beta} \times n(n-1)\left(1+e^{i\beta}\right)^{n-2}.$$

On factorise alors par l'angle moitié sous la puissance :

$$1 + e^{i\beta} = e^{i\frac{\beta}{2}}\left(e^{-i\frac{\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i\frac{\beta}{2}}$$

ce qui donne bien :

$$\left(1+e^{i\beta}\right)^{n-2} = 2^{n-2}\cos^{n-2}\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i(n-2)\frac{\beta}{2}}$$

et par suite :

$$S_n = n(n-1)2^{n-2}\cos^{n-2}\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i(n-2)\frac{\beta}{2}} e^{2i\beta} = n(n-1)2^{n-2}\cos^{n-2}\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i\frac{(n+2)\beta}{2}}.$$

4. On exprime le sinus comme la partie imaginaire d'une exponentielle ; le produit par un réel et la somme peuvent "rentrer" dans la partie imaginaire d'après les propriétés élémentaires des parties réelles et imaginaires et on a :

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}\sin(\alpha+k\beta) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}\operatorname{Im}\left(e^{i(\alpha+k\beta)}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} e^{i(\alpha+k\beta)}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} e^{i\alpha} e^{ik\beta)}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(e^{i\alpha}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} e^{ik\beta)}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{i\alpha} S_n\right). \end{aligned}$$

On remplace S_n par sa valeur et cette fois on sort les facteurs réels de la partie imaginaire :

$$\begin{aligned} A_n &= \operatorname{Im}\left(e^{i\alpha} S_n\right) = \operatorname{Im}\left(e^{i\alpha} n(n-1)2^{n-2}\cos^{n-2}\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i\frac{(n+2)\beta}{2}}\right) \\ &= n(n-1)2^{n-2}\cos^{n-2}\left(\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{Im}\left(e^{i\left(\alpha+(n+2)\frac{\beta}{2}\right)}\right) \\ &= n(n-1)2^{n-2}\cos^{n-2}\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha+n\frac{\beta}{2}\right). \end{aligned}$$