Devoir libre n° 10 - Corrigé

Exercice 1.
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. On veut résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = 3xe^x$.
   Les solutions homogènes sont les fonctions de la forme $y_H(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$, avec A et B des constantes réelles.

   On cherche ensuite une solution particulière de la forme $y_P(x) = (ax+b)e^x$, on a $y_P'(x) = (a+ax+b)e^x$ et $y_P''(x) = (a+a+ax+b)e^x$ donc y_P est solution de l'équation si :

   $$[3ax + (3a+3b)]e^x = 3xe^x$$

   donc $a = 1$ et $b = -1$ conviennent, et les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme

   $$y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] + (x-1)e^x$$

   avec A et B des constantes réelles.

2. On veut résoudre l'équation différentielle $y'' + 3y' - 4y = 2xe^x - x^2 - 1$.
   L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $r^2+3r-4 = 0$, de discriminant $\Delta = 25$, et a pour solutions $r = \frac{-3\pm5}{2} = 1$ ou -4.
   Les solutions homogènes sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y_H(x) = Ae^x + Be^{-4x}$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

   Pour trouver une solution particulière, on utilise le principe de superposition et on cherche une fonction y_{P1} qui vérifie $y'' + 3y' - 4y = 2xe^x$, sous la forme $y_{P1}(x) = (ax^2+bx)e^x$. On calcule les différentes dérivées et on identifie, on obtient :

   $$y_{P1}'(x) = (2ax + b + ax^2 + bx)e^x \quad \text{puis} \quad y_{P1}''(x) = (2a + 2ax + b + 2ax + b + ax^2 + bx)e^x$$

   ce qui donne :

   $$[(a + 3a - 4a)x^2 + (4a + b + 6a + 3b - 4b)x + (2a + 2b + 3b)]e^x = 2xe^x$$

   donc $10a = 2$ et $2a+5b = 0$, c'est-à-dire que $a = 1/5$ et $b = -2/25$, et enfin $y_{P1}(x) = \left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{25}x\right)e^x$.

   On cherche ensuite y_{P2} qui vérifie $y'' + 3y' - 4y = -x^2 - 1$, sous la forme $y_{P2}(x) = ax^2 + bx + c$, avec $y_{P2}'(x) = 2ax + b$ et $y_{P2}''(x) = 2a$, ce qui donne

   $$-4ax^2 + (6a - 4b)x + (2a + 3b - 4c) = -x^2 - 1$$

   donc $-4a = -1$ donc $a = 1/4$, $6a - 4b = 0$ ce qui donne $b = 3a/2 = 3/8$ et enfin $2a+3b-4c = -1$ ce qui donne $c = 21/32$, donc $y_{P2}(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{21}{32}$, et enfin $y_P(x) = \left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{25}x\right)e^x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{21}{32}$.

   Enfin les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

   $$y(x) = Ae^x + Be^{-4x} + \left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{25}x\right)e^x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{21}{32}.$$

3. On veut résoudre l'équation différentielle $y'' + 3y' + 4y = 5xe^x$.
L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $r^2 + 3r + 4 = 0$, de discriminant $\Delta = -7$, et a pour solutions $r = \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$.
Les solutions homogènes sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y_H(x) = e^{-\frac{3}{2}x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right]$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $y_P(x) = (ax+b)e^x$, qui donne $y_P'(x) = (a + ax + b)e^x$ puis $y_P''(x) = (a + a + ax + b)e^x$ ce qui donne :

$$[(a + 3a + 4a)x + (2a + b + 3a + 3b + 4b)]e^x = 5xe^x$$

donc $8a = 5$ et $5a + 8b = 0$, qui donne $a = \frac{5}{8}$ et $b = -\frac{25}{64}$ puis $y_P(x) = \left(\frac{5}{8}x - \frac{25}{64}\right)e^x$.

Enfin les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = e^{-\frac{3}{2}x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right] + \left(\frac{5}{8}x - \frac{25}{64}\right)e^x.$$

4. On veut résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$.
L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $r^2+4r+4 = 0$, de discriminant $\Delta = 0$, et a pour solution $r = -2$.
Les solutions homogènes sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y_H(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $y_P(x) = ax^2e^{-2x}$, qui donne $y_P'(x) = (2ax - 2ax^2)e^{-2x}$ puis $y_P''(x) = (2a - 4ax - 4ax + 4ax^2)e^{-2x}$ ce qui donne :

$$[(4a - 8a + 4a)x^2 + (-8a + 8a)x + 2a]e{-}2x = 3e^{-2x}$$

donc $2a = 3$ $a = \frac{3}{2}$ puis $y_P(x) = \frac{3}{2}x^2e^x$.

Enfin les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x} + \frac{3}{2}x^2e^{-2x}$$

Exercice 2.
On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme primitive de f ; on en déduit, en remarquant que $f(x) = \frac{3F(x)}{2x}$ sur $\mathbb{R}^*$, que f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, et en dérivant l'égalité on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ 2f(x) + 2xf'(x) = 3f(x) \quad \text{ou encore} \quad 2xf'(x) - f(x) = 0 \quad \text{ou encore} \quad f'(x) - \frac{1}{2x}f(x) = 0$$

On résout alors l'équation différentielle homogène $y' - \frac{1}{2x}y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$: les solutions sont les fonctions de la forme

$$y_H(x) = Ae^{\frac{1}{2}\ln|x|} = A\sqrt{|x|}.$$

On en déduit qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = A\sqrt{-x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $f(x) = B\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et comme f doit être continue, on en déduit que $f(0) = 0$ en prenant la limite en 0 des deux expressions. On injecte alors dans l'équation de départ :

- Si $x \geq 0$, on a $2xf(x) = 2Bx^{3/2}$ et $3\int_0^x f(t)\,dt = 3B \times \left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_0^x = 2Bx^{3/2}$ donc l'égalité est bien vérifiée.
- Si $x \leq 0$, on a $2xf(x) = 2Ax\sqrt{-x}$ et $3\int_0^x f(t)\,dt = -3A\left[\frac{(-t)^{3/2}}{3/2}\right]_0^x = -2A(-x)^{3/2} = -2A \times (-x)\sqrt{-x} = 2Ax\sqrt{-x}$ donc l'égalité est vérifiée.

On en déduit donc que les fonctions f de la forme précédente sont bien toutes les solutions du problème.