Devoir libre n° 11
pour le 30 novembre 2026

Exercice 1.
Déterminer le terme d'ordre n des suites suivantes :

1. (u_n) définie par $u_0 = -4$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\frac{u_n}{3} + \frac{1}{2}$.

2. (a_n) définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = 11a_{n+1} - 3a_n$.

3. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $b_0 = -1$, $b_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+2} = 2ib_{n+1} + b_n$.

4. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $c_0 = -1$, $c_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}c_{n+1} - \frac{1}{4}c_n$.

5. (d_n) et (e_n) définies par $\begin{cases} d_0 = -1 \\ e_0 = 3 \end{cases}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} d_{n+1} = 3d_n - e_n \\ e_{n+1} = d_n + 3e_n \end{cases}$.

6. (v_n) définie par $v_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3(n+2)v_n$.

7. (w_n) définie par $w_0 = w_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = (n+1)w_n$.

Exercice 2.
On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \frac{(a_{n+1})^2}{a_n} \end{cases}$

1. Calculer a_2, a_3, a_4 et a_5.
2. Conjecturer une expression de a_n en fonction de n, puis démontrer cette conjecture par récurrence.
3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{4^n}$$

   (a) Exprimer v_n en fonction de n.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.