# Devoir libre n° 11 - Corrigé

**Exercice 1.**

1. On reconnait une suite arithmético-géométrique, dont la valeur stationnaire est la solution de l'équation :
$$K = -\frac{K}{3} + \frac{1}{2} \iff \frac{4K}{3} = \frac{1}{2} \iff K = \frac{3}{8}$$
La suite $(v_n)$ définie par $v_n = u_n - \frac{3}{8}$ vérifie alors :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{3}{8} = -\frac{u_n}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = -\frac{u_n}{3} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{3}\left(u_n - \frac{3}{8}\right) = -\frac{1}{3}v_n$$
donc :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n v_0 = \frac{4 \times (-1)^{n+1}}{3^n}$$
et enfin :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + \frac{3}{8} = \frac{4 \times (-1)^{n+1}}{3^n} + \frac{3}{8}.$$

2. L'équation caractéristique est $r^2 - 11r + 3 = 0$ qui admet pour discriminant :
$$\Delta = 121 - 12 = 109 = \left(\sqrt{109}\right)^2$$
et pour racines $\frac{11 \pm \sqrt{109}}{2}$, donc il existe des réels $\lambda$ et $\mu$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda\left(\frac{11 - \sqrt{109}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{11 + \sqrt{109}}{2}\right)^n.$$
On a de plus $a_0 = 0$, donc $\lambda + \mu = 0$, puis $\mu = -\lambda$, et $a_1 = 1$ donc :
$$\lambda \times \frac{11 - \sqrt{109}}{2} + \mu \times \frac{11 + \sqrt{109}}{2} = \lambda \times \frac{11 - \sqrt{109}}{2} - \lambda \times \frac{11 + \sqrt{109}}{2} = \lambda\sqrt{109} = 1$$
donc $\lambda = \frac{1}{\sqrt{109}}$ et $\mu = -\frac{1}{\sqrt{109}}$, puis :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{\sqrt{109}}\left(\left(\frac{11 - \sqrt{109}}{2}\right)^n - \left(\frac{11 + \sqrt{109}}{2}\right)^n\right).$$

3. $(b_n)$ est récurrente linéaire double, l'équation caractéristique associée est $r^2 - 2ir - 1 = 0$ qui a pour discriminant $\Delta = 4i^2 + 4 = 0$ et pour unique racine $r_0 = \frac{2i}{2} = i$ donc il existe des réels $\lambda$ et $\mu$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \lambda i^n + \mu n i^n.$$
Or on sait que $b_0 = -1$ et $b_1 = 1$ ce qui donne :
$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda i + \mu i = 1 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \lambda = -1 \\ (\mu - 1)i = 1 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu - 1 = 1/i = i/i^2 = -i \end{cases} \text{ et enfin } \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 - i \end{cases}$$
et enfin :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \big[-1 + (1-i)n\big] \times i^n.$$

4. L'équation caractéristique $r^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}r + \frac{1}{4} = 0$ a pour discriminant $\Delta = \frac{2}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$ et pour racines complexes conjuguées

$$r = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \times e^{\pm i\pi/4}$$

donc il existe $\alpha$ et $\beta$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\alpha\cos(n\pi/4) + \beta\sin(n\pi/4)\right].$$

Avec les conditions initiales, on obtient de plus :

$$\left\{\begin{array}{c} c_0 = -1 \\ c_1 = 1 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{c} \alpha = -1 \\ \frac{\alpha\frac{\sqrt{2}}{2} + \beta\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 1 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{c} \alpha = -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{4}(-1+\beta) = 1 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{c} \alpha = -1 \\ \beta = \frac{4}{\sqrt{2}} + 1 = 1 + 2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

donc on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \frac{\left(1+2\sqrt{2}\right)\sin(n\pi/4) - \cos(n\pi/4)}{2^n}.$$

5. Déterminons une relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par $(d_n)$ :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ d_{n+2} &= 3d_{n+1} - e_{n+1} \\ &= 3d_{n+1} - (d_n + 3e_n) = 3d_{n+1} - d_n - 3e_n \\ &= 3d_{n+1} - d_n - 3\left(3d_n - d_{n+1}\right) = 6d_{n+1} - 10d_n \end{aligned}$$

L'équation caractérisique de cette relation de récurrence double est $r^2 - 6r + 10 = 0$, qui admet pour discriminant :

$$\Delta = 36 - 40 = -4 = (2i)^2$$

puis pour racines :

$$r = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i = \sqrt{10}e^{\pm i\arctan(1/3)}.$$

Posons $\theta = \arctan(1/3)$ et remarquons (ça servira plus loin) que :

$$3 + i = \sqrt{10}e^{i\theta} = \sqrt{10}\cos(\theta) + i\sqrt{10}\sin(\theta)$$

donc

$$\cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

On en déduit alors qu'il existe $a$ et $b$ réels tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = \left(\sqrt{10}\right)^n \left[a\cos(n\theta) + b\sin(n\theta)\right]$$

On cherche alors $a$ et $b$ : on sait que $d_0 = -1$, on a donc :

$$1 \times (a \times 1 + b \times 0) = -1 \quad \text{puis} \quad a = -1$$

et enfin on sait que $d_1 = 2d_0 - e_0 = -5$ donc :

$$\sqrt{10} \times \left[-\cos(\theta) + b\sin(\theta)\right] = -5$$

On a déterminé le cosinus et le sinus de $\theta$ plus haut, on a alors :

$$\sqrt{10} \times \frac{-3+b}{\sqrt{10}} = -5 \quad \text{puis} \quad -3 + b = -5$$

et enfin :

$$b = -2$$

qui donne finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = \left(\sqrt{10}\right)^n \left[-\cos(n\theta) - 2\sin(n\theta)\right].$$

Enfin on peut déterminer $e_n$ en fonction de $d_n$ et $d_{n+1}$ : $e_n = 3d_n - d_{n+1}$, ce qui donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$e_n = 3 \times \left(\sqrt{10}\right)^n \left[-\cos(n\theta) - 2\sin(n\theta)\right] - \left(\sqrt{10}\right)^{n+1} \left[-\cos((n+1)\theta) - 2\sin((n+1)\theta)\right]$$

(On peut s'amuser à factoriser par la puissance $n$ et à développer $\cos(n\theta+\theta)$ et $\sin(n\theta+\theta)$ pour retrouver une forme similaire à celle trouvée pour $d_n$, mais ça n'a pas grand intérêt.)

6. On itère la relation : soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_n &= 3(n+1)v_{n-1} \\ &= 3(n+1) \times 3nv_{n-2} = 3^2(n+1)nv_{n-2} \\ &= 3^2(n+1)n \times 3(n-1)v_{n-3} = 3^3(n+1)n(n-1)v_{n-3} \\ &= \dots \\ &= 3^n(n+1)n(n-1)\dots 2v_0 = 3^n(n+1)! \times 2 = 2 \times 3^n(n+1)! \end{aligned}$$

7. On doit itérer la relation, mais comme elle descend de deux en deux on sépare les termes pairs et impairs ; on commence par les termes pairs ; soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} w_{2n} &= (2n-1)w_{2n-2} \\ &= (2n-1)(2n-3)w_{2n-4} \\ &= \dots \\ &= (2n-1)(2n-3)\dots 1 w_0 \\ &= \frac{2n(2n-1)\dots 2 \times 1}{2n(2n-2)\cdots \times 2} w_0 = \frac{(2n)!}{2^n n!} \times 3 = \frac{3(2n)!}{2^n n!}. \end{aligned}$$

et pour les termes impairs :

$$\begin{aligned} w_{2n+1} &= 2nw_{2n-1} \\ &= 2n(2n-2)w_{2n-3} \\ &= \dots \\ &= 2n(2n-2)\dots 2w_1 = 2^n n! w_1 = 3 \times 2^n n!. \end{aligned}$$

**Exercice 2.**

On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \frac{(a_{n+1})^2}{a_n} \end{cases}$

1. On calcule sans difficulté :

$$a_2 = \frac{4^2}{2} = 8\ ,\ a_3 = \frac{8^2}{4} = 16\ ,\ a_4 = \frac{16^2}{8} = 32\ ,\ a_5 = \frac{32^2}{16} = 64.$$

2. On conjecture que $a_2 = 2^{n+1}$, et on le prouve par récurrence **double** sur $n$ :

   - Pour $n = 0$, on a $a_0 = 2$ et $2^1 = 2$ donc $a_0 = 2^1$.
   - Pour $n = 1$, on a $a_1 = 4$ et $2^2 = 4$ donc $a_1 = 2^2$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, montrons que les propriété aux rang $n$ et $n+1$ impliquent celle au rang $n+2$. On suppose donc que $a_n = 2^{n+1}$ et $a_{n+1} = 2^{n+2}$, on a alors :

$$a_{n+2} = \frac{(a_{n+1})^2}{a_n} = \frac{\left(2^{n+2}\right)^2}{2^{n+1}} = \frac{2^{2n+4}}{2^{n+1}} = 2^{n+3}$$

   donc la propriété est bien héréditaire.

- D'après le principe de récurrence, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 2^{n+1}.$$

3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{4^n}$$

(a) On reconnaît une somme géométrique :

$$v_n = \frac{1}{4^n} \sum_{k=n+1}^{2n} 2^{k+1} = \frac{1}{4^n} \times 2^{n+2} \times \frac{1-2^n}{1-2} = \frac{2^{n+2}(2^n-1)}{2^{2n}} = \frac{2^n-1}{2^{n-2}} = 4 - \frac{1}{2^{n-2}}.$$

(b) Comme $2^{n-2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, la suite $(v_n)$ converge vers 4 par opérations élémentaires.