Devoir maison n° 3
6 novembre 2026

NB : les résultats , la numérotation des exercices et des questions doivent être mis en évidence. Les pages doivent être numérotées.

Exercice 1.
Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{1+2k+k^3} \geq \sqrt{(1+k)^2}$.

2. $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{\ln\left(e^{k^2}-1\right)} < k$.

3. (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1+x$.
   (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x^2} \geq 1+2x^2$.
   (c) En déduire également que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(1+2^n) \leq 2^n$.

4. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ |ab| \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

Exercice 2.
Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 5. Calculer les sommes et produits suivants.

1. $\sum_{k=n}^{2n} (k-3)^3$.
2. $\sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(1+\frac{2}{j}\right)$.
3. Calculer $\prod_{k=1}^{n} (2k+1)$.

Exercice 3.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$. On veut montrer que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geq n^2.$$

1. Justifier que pour tout couple (a,b) de réels strictement positifs, on a : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

2. Justifier alors que : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i}\right) \geq 2n^2$.

3. (a) Montrer que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{x_i}{x_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{x_i}$.
   (b) En déduire que : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{x_i}{x_j} \geq n^2$.

4. Conclure.

Exercice 4. La fonction de Gudermann.

Dans tout l'exercice, on note gd la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{gd}(x) = \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\ dt.$$

1. (a) Montrer que gd est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
   (b) En déduire que gd est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que gd est impaire.
3. En utilisant le changement de variable $u = e^t$, montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{gd}(x) = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}.$$
4. En utilisant le changement de variable $u = \mathrm{sh}(t)$, montrer également que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{gd}(x) = \arctan(\mathrm{sh}(x)).$$
5. Justifier alors que gd réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On note alors arcgd la bijection réciproque de gd.

6. Montrer alors successivement que :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan \circ \mathrm{gd}(x) = \mathrm{sh}(x)$.
   (b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos \circ \mathrm{gd}(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$.
   (c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin \circ \mathrm{gd}(x) = \mathrm{th}(x)$.
7. En déduire alors des expressions de $\mathrm{sh} \circ \mathrm{arcgd}$, $\mathrm{ch} \circ \mathrm{arcgd}$ et $\mathrm{th} \circ \mathrm{arcgd}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
8. On admet que arcgd est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que :
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \mathrm{arcgd}'(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$
9. Justifier alors que :
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \mathrm{arcgd}(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos(t)}\ dt.$$
10. A l'aide du changement de variable $u = \sin(t)$, montrer que :
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \mathrm{arcgd}(x) = \int_0^{\sin(x)} \frac{1}{1-u^2}\ du.$$
11. Calculer cette intégrale et montrer finalement :
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \mathrm{arcgd}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right).$$

Problème : Wallis et Gauss.

L'objectif de ce problème est de montrer que :

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

A. Intégrales de Wallis.

Pour tout entier naturel n, on définit W_n par :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\ dt.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, l'intégrale W_n existe bien.
2. Calculer W_0 et W_1.
3. Montrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs.

   On **admet** que la suite est en fait à valeurs **strictement** postives.
4. En remarquant que $\cos^n(t) = \cos^{n-1}(t) \times \cos(t)$, montrer que :

   $$\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ W_n = (n-1) \times (W_{n-2} - W_n) \quad \text{puis} \quad nW_n = (n-1)W_{n-2}.$$
5. Justifier à l'aide des deux questions précédentes que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq \frac{W_n}{W_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n}$$

   puis en déduire la limite de $\left(\frac{W_n}{W_{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Montrer par récurrence que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n} \times W_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}.$$
7. Montrer alors que :

   $$(2n+1) \times (W_{2n+1})^2 \to \frac{\pi}{2} \qquad \text{puis} \qquad 2n \times (W_{2n})^2 \to \frac{\pi}{2}.$$

B. Existence de limites.

8. On pose f la fonction définie par :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\ dt.$$

   (a) Montrer que f est impaire.

   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

   (c) Justifier que :

   $$\forall x \in [1, +\infty[,\ f(x) \leq 1 + \int_1^x e^{-t}\ dt.$$

   (d) En déduire que f est majorée par $1 + \frac{1}{e}$, et en déduire qu'elle admet une limite finie en $+\infty$.

   Cette limite sera notée $\int_0^\infty e^{-t^2}\ dt$ dans la suite du problème.
9. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, et on définit la fonction g_n :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\ dt.$$

   (a) Justifier que g_n est dérivable et déterminer sa dérivée.

   (b) Justifier que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g_n(x) \leq \frac{\pi}{2}.$$

   (c) En déduire que g_n admet une limite finie en $+\infty$, qui sera notée $\int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^n}\ dt$ dans la suite du problème.
10. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, et on définit la fonction h_n par :

    $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h_n(x) = \int_0^x \cos^{2n-2}(t)\ dt.$$

    Justifier que h_n est continue.

C. Calcul de l'intégrale de Gauss.

11. Justifier que :
$$\forall u \leq 1,\ (1-u)^n \leq e^{-nu}.$$

12. Justifier également que :
$$\forall u > -1,\ e^{-nu} \leq \frac{1}{(1+u)^n}.$$

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
    (a) Montrer que $\int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{dt}{(1+\tan^2(t))^{n-1}} = \int_0^{\tan(\pi/2-\varepsilon)} \frac{1}{(1+u^2)^n}\ du$.
    (b) En déduire que $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\ dt = W_{2n-2}$.

14. Démontrer que :
$$\forall x \in [1, +\infty[,\ \int_0^1 (1-t^2)^n\ dt \leq \int_0^x e^{-nt^2}\ dt \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\ dt.$$

15. Montrer à l'aide d'un changement de variable que $\int_0^x e^{-nt^2}\ dt = \frac{f(\sqrt{n}x)}{\sqrt{n}}$ et en déduire que :
$$W_{2n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} e^{-t^2}\ dt \leq W_{2n-2}.$$

16. Déterminer enfin les limites de $(\sqrt{n}W_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sqrt{n}W_{2n-2})_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de la partie I, et en déduire que :
$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}\ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$