Devoir maison n° 3 - Corrigé

Exercice 1.
Montrer les inégalités suivantes :

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on remarque que $(1+k)^2 = 1+2k+k^2$ et de plus :

$$k \geq 1 \quad \text{donc} \quad k^3 \geq k^2 \quad \text{puis} \quad 1+2k+k^3 \geq 1+2k+k^2 = (1+k)^2$$

Enfin la racine carrée est croissante donc :

$$\sqrt{1+2k+k^3} \geq \sqrt{(1+k)^2}.$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on remarque que $k = \sqrt{k^2} = \sqrt{\ln(e^{k^2})}$ et on a :

$$e^{k^2} - 1 \leq e^{k^2}$$

puis le logarithme et la racine sont croissantes donc :

$$\sqrt{\ln\left(e^{k^2}-1\right)} \leq \sqrt{\ln(e^{k^2})} = k.$$

3. (a) L'exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, donc son graphe est au-dessus de ses tangentes, et sa tangente au point d'abscisse 0 admet pour équation $y = 1+x$, on en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1+x.$$

(b) Lorsque $x \in \mathbb{R}$, alors $2x^2 \in \mathbb{R}$ donc on peut appliquer la question précédente et on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x^2} \geq 1+2x^2.$$

(c) On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 2^n est élément de $[1,+\infty[$, il suffit donc de montrer que $\ln(1+x) \leq x$ sur $[1,+\infty[$.
Or on a vu que pour tout x réel, $e^x \geq 1+x$: en composant par ln (ce qui est possible pour $x \in [1,+\infty[$ puisque $1+x>0$), on a donc :

$$\forall x \in [1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leq x$$

De plus, lorsque $n \in \mathbb{N}$, alors $2^n \in [1,+\infty[$ donc l'inégalité précédente s'applique et on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ln\left(1+2^n\right) \leq 2^n.$$

4. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$a^2+b^2-2|ab| = |a|^2+|b|^2-2|a|\times|b| = (|a|-|b|)^2$$

donc

$$a^2+b^2-2|ab| \geq 0 \quad \text{puis} \quad a^2+b^2 \geq 2|ab|$$

et enfin :

$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ |ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Exercice 2.

1. $\sum_{k=n}^{2n}(k-3)^3 = \sum_{k=n-3}^{2n-3} k^3 = \sum_{k=1}^{2n-3} k^3 - \sum_{k=1}^{n-4} k^3 = \frac{(2n-3)^2(2n-2)^2-(n-4)^2(n-3)^2}{4}$.

2. $\sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(1+\frac{2}{j}\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(\frac{j+2}{j}\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \ln(j+2) - \ln(j) = \ln(n+1) + \ln n - \ln 1 - \ln 2 = \ln\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$.

3. Le produit des nombres impairs est le produit de tous les entiers divisé par le produit des nombres pairs "qui manquaient" :
$$\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=2}^{2n+1} k}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

Exercice 3.

1. Soit (a,b) un couple de réels strictement positifs, on a :
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab}$$
Or $a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \geq 0$, donc $a^2+b^2 \geq 2ab$. Enfin, comme $ab>0$, on a bien :
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2.$$

2. Comme les réels x_i pour i entre 1 et n sont tous strictement positifs, on a donc :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i} \geq 2$$
et en sommant :
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}\right) \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 2 = 2n^2.$$

3. En échangeant l'ordre des sommes on a :
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_j}$$
et comme les indices sont muets, on peut échanger les rôles de i et j et on a bien :
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}.$$
On en déduit que :
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{x_i} = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j}$$
donc
$$2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j} \geq 2n^2$$
et enfin
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j} \geq n^2.$$

4. On remarque enfin que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \times \frac{1}{x_j}$$

donc on a bien :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{x_i}{x_j} \geq n^2.$$

Exercice 4. La fonction de Gudermann.

1. (a) ch est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $\frac{1}{\text{ch}}$ est continue sur $\mathbb{R}$: le théorème fondamental de l'analyse assure alors que gd est l'unique primitive de $\frac{1}{\text{ch}}$ qui s'annule en 0 : elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\text{gd}' = \frac{1}{\text{ch}}$.

   (b) gd' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc gd est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\text{gd}(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{\text{ch}(t)}\, dt.$$

   Le changement de variable $u = -t$ donne alors :

$$\text{gd}(-x) = \int_0^{x} \frac{1}{\text{ch}(-u)} \times (-du) = -\int_0^{x} \frac{1}{\text{ch}(u)}\, du = -\,\text{gd}(x)$$

   donc gd est impaire.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, le changement de variable $u = e^t$, qui s'écrit aussi $t = \ln(u)$, donne :

$$\begin{aligned}\text{gd}(x) &= \int_0^{x} \frac{2}{e^t + \frac{1}{e^t}}\, dt = \int_{e^0}^{e^x} \frac{2}{u + \frac{1}{u}} \times \frac{1}{u}\, du = 2\int_1^{e^x} \frac{1}{u^2+1}\, du = 2\left(\arctan(e^x) - \arctan(1)\right)\\ &= 2\arctan(e^x) - 2 \times \frac{\pi}{4} = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\text{gd}(x) = \int_0^{x} \frac{1}{\text{ch}(t)}\, dt = \int_0^{x} \frac{\text{ch}(t)}{\text{ch}^2(t)}\, dt = \int_0^{x} \frac{1}{1+\text{sh}^2(t)} \times \text{sh}'(t)\, dt$$

   donc le changement de variable $u = \text{sh}(t)$ donne :

$$\text{gd}(x) = \int_0^{\text{sh}(x)} \frac{1}{1+u^2}\, du = \arctan(\text{sh}(x)) - \arctan(0) = \arctan(\text{sh}(x)).$$

5. On a déjà vu que gd est continue et strictement croissante, et la dernière expression obtenue (ou la précédente) montre, par opérations usuelles, que $\text{gd}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

   Comme gd est impaire (ou par opérations usuelles à nouveau), on a aussi $\text{gd}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\frac{\pi}{2}$: elle réalise bien une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

6. Montrer alors successivement que :

   (a) Pour tout x réel, on sait que $\tan(\arctan(x)) = x$. On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tan \circ\, \text{gd}(x) = \tan(\arctan(\text{sh}(x))) = \text{sh}(x).$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. La question précédente assure que $\tan^2(\text{gd}(x)) = \text{sh}^2(x)$, puis $1 + \tan^2(\text{gd}(x)) = 1 + \text{sh}^2(x) = \text{ch}^2(x)$.

Or $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$, donc $\cos^2 = \frac{1}{1+\tan^2}$, on a donc :

$$\cos^2(\text{gd}(x)) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} \quad \text{puis} \quad |\cos(\text{gd}(x))| = |\text{ch}(x)|.$$

On sait que ch est toujours positive, donc $|\text{ch}(x)| = \text{ch}(x)$. Reste à déterminer le signe de $\cos(\text{gd}(x))$.

Or on a vu que gd est à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos(\text{gd}(x)) \geq 0$, et enfin $|\cos(\text{gd}(x))| = \cos(\text{gd}(x))$. On a donc montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos \circ \text{gd}(x) = \frac{1}{\text{ch}(x)}.$$

(c) Enfin on sait que $\sin = \tan \times \cos$, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin \circ \text{gd}(x) = \tan(\text{gd}(x)) \times \cos(\text{gd}(x)) = \text{sh}(x) \times \frac{1}{\text{ch}(x)} = \text{th}(x).$$

7. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On applique les formules précédentes en $\text{arcgd}(x)$, qui est bien un réel, et on a :
   - $\text{sh} \circ \text{arcgd}(x) = \tan \circ \text{gd} \circ \text{arcgd}(x) = \tan(x)$.
   - $\text{ch} \circ \text{arcgd}(x) = \frac{1}{\cos \circ \text{gd} \circ \text{arcgd}(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$.
   - $\text{th} \circ \text{arcgd}(x) = \sin \circ \text{gd} \circ \text{arcgd}(x) = \sin(x)$.

8. On peut utiliser n'importe laquelle des trois formules précédentes, ou bien la formule $\text{gd} \circ \text{arcgd}(x) = x$. En dérivant l'une de ces égalités, on obtient au choix :
   - $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \text{arcgd}'(x) \times \text{ch}(\text{arcgd}(x)) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, puis :
   $$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \text{arcgd}'(x) = \frac{1}{\text{ch}(\text{arcgd}(x)) \times \cos^2(x)} = \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)}.$$
   - $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \text{arcgd}'(x) \times \text{sh}(\text{arcgd}(x)) = -\frac{-\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$, puis :
   $$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \text{arcgd}'(x) = \frac{\sin(x)}{\text{sh}(\text{arcgd}(x)) \times \cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\tan(x) \times \cos^2(x)} = \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)}.$$
   - $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \text{arcgd}'(x) \times (1 - \text{th}^2(\text{arcgd}(x)) = \cos(x)$, puis :
   $$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \text{arcgd}'(x) = \frac{\cos(x)}{(1 - \text{th}^2(\text{arcgd}(x)))} = \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)} = \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)}.$$
   - $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \text{arcgd}'(x) \times \frac{1}{\text{ch}(\text{arcgd}(x))} = 1$, puis :
   $$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \text{arcgd}'(x) = \ \text{ch}(\text{arcgd}(x)) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

9. arcgd est donc une primitive de $\frac{1}{\cos}$, et $x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\cos(t)}\ dt$ est sa primitive qui s'annule en 0 d'après le théorème fondamental de l'analyse.

Reste à prouver que arcgd s'annule en 0 : mais on sait que gd est impaire, donc $\text{gd}(0) = 0$, et en composant par arcgd on obtient bien $\text{arcgd}(0) = \text{arcgd}(\text{gd}(0)) = 0$. Les deux primitives sont donc égales, et on a bien :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \text{arcgd}(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos(t)}\ dt.$$

10. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On a :

$$\text{arcgd}(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos(t)}\, dt = \int_0^x \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)}\, dt = \int_0^x \frac{1}{1-\sin^2(t)} \times \sin'(t)\, dt$$

donc le changement de variable $u = \sin(t)$ donne :

$$\text{arcgd}(x) = \int_0^{\sin(x)} \frac{1}{1-u^2}\, du.$$

11. On a de plus :

$$\forall u \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{(1-u)(1+u)} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u}$$

avec $a = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$ et finalement :

$$\forall u \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-u^2} = \frac{1/2}{1-u} + \frac{1/2}{1+u}.$$

Enfin on a :

$$\begin{aligned}\text{arcgd}(x) &= \frac{1}{2}\int_0^{\sin(x)} \frac{1}{1-u}\, du + \frac{1}{2}\int_0^{\sin(x)} \frac{1}{1+u}\, du = \frac{1}{2}\Big[-\ln(1-u)\Big]_0^{\sin(x)} + \frac{1}{2}\Big[\ln(1+u)\Big]_0^{\sin(x)} \\ &= -\frac{1}{2}\ln(1-\sin(x)) + \frac{1}{2}\ln(1+\sin(x)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right).\end{aligned}$$

Problème : Wallis et Gauss.

A. Intégrales de Wallis.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \cos^n(t)$ est continue sur $[0, \pi/2]$ donc W_n existe bien.

2. $W_0 = \int_0^{\pi/2} 1\, dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\, dt = [\sin(t)]_0^{\pi/2} = 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)[\cos(t) - 1]\, dt \leq 0$$

puisque sur $[0, \pi/2]$, $\cos(t) \geq 0$ et $\cos(t) - 1 \leq 0$: la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

Par ailleurs, la fonction $t \mapsto \cos^n(t)$ est positive sur $[0, \pi/2]$ donc pour tout n, on a bien $W_n \geq 0$.

4. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$, on a :

$$\begin{aligned}W_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}(t) \times \cos(t)\, dt = \Big[\cos^{n-1}(t) \times \sin(t)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\sin(t) \times (n-1)\cos^{n-2}(t) \times \sin(t)\, dt \\ &= 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^{n-2}(t)\, dt.\end{aligned}$$

Enfin on a bien :

$$\begin{aligned}W_n &= (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2(t)) \times \cos^{n-2}(t)\, dt = (n-1) \times \left(\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}(t)\, dt - \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\, dt\right) \\ &= (n-1) \times (W_{n-2} - W_n)\end{aligned}$$

puis :

$$W_n = (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n \quad \text{et enfin} \quad nW_n = (n-1)W_{n-2}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; d'après la décroissance de la suite, on a $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$. On divise par W_{n+1} qui est strictement positif :
$$1 \leq \frac{W_n}{W_{n+1}} \leq \frac{W_{n-1}}{W_{n+1}} = \frac{n+1}{n}$$
puisque $(n+1)W_{n+1} = nW_{n-1}$, donc $\frac{W_{n-1}}{W_{n+1}} = \frac{n+1}{n}$.

Enfin on a $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$, donc par encadrement, $\frac{W_n}{W_{n+1}} \to 1$.

6. D'après la question 2, $W_0 \times W_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2(2\times 0+1)} = \frac{\pi}{2}$: la propriété est vraie au rang 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $W_{2n} \times W_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$. La question 4 assure alors que :
$$(2n+2)W_{2n+2} = (2n+1)W_{2n} \quad \text{donc} \quad W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n}$$
et de même
$$(2n+3)W_{2n+3} = (2n+2)W_{2n+1} \quad \text{donc} \quad W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3}W_{2n+1}$$
donc
$$W_{2n+2} \times W_{2n+3} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{2n+2}{2n+3} \times W_{2n} \times W_{2n+1} = \frac{2n+1}{2n+3} \times \frac{\pi}{2(2n+1)} = \frac{\pi}{2(2n+3)}$$
donc la propriété au rang n implique bien celle au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence, on en déduit bien que : :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n} \times W_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}.$$

7. On en déduit alors que :
$$(2n+1) \times W_{2n+1} = \frac{\pi}{2W_{2n}} \quad \text{puis} \quad (2n+1) \times W_{2n+1}^2 = \frac{\pi}{2} \times \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}}.$$
Or on sait que $W_n/W_{n+1} \to 0$: la sous-suite W_{2n}/W_{2n+1} converge donc également vers 1, puis $W_{2n+1}/W_{2n} \to 1/1 = 1$. Finalement on a bien :
$$(2n+1) \times W_{2n+1}^2 \to \frac{\pi}{2}.$$
On en déduit alors que :
$$2n \times W_{2n}^2 = \frac{2n}{2n+1} \times \left(\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}}\right)^2 \times (2n+1)\ W_{2n+1}^2.$$
Or on a $\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{1+1/(2n)} \to 1$, $W_{2n}/W_{2n+1} \to 1$ et $(2n+1)\ W_{2n+1}^2 \to \frac{\pi}{2}$ donc :
$$2nW_{2n}^2 \to \frac{\pi}{2}.$$

B. Existence de limites.

8. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2}\ dt.$$
On pose le changement de variable $u = -t$ et on a :
$$f(-x) = \int_0^{-(-x)} e^{-(-u)^2} \times (-du) = -\int_0^{x} e^{-u^2}\ du = -f(x)$$
donc f est bien impaire.

(b) $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par opérations usuelles : le théorème fondamental de l'analyse assure donc que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-x^2}.$$

(c) Soit $x \in [1, +\infty[$, on a :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\ dt = \int_0^1 e^{-t^2}\ dt + \int_1^x e^{-t^2}\ dt.$$

Or, pour tout $t \in [0,1]$, $e^{-t^2} \leq 1$ et pour tout $t \in [1,x]$, $t^2 \geq t$ donc $-t^2 \leq -t$ puis $e^{-t^2} \leq e^{-t}$. On a donc :

$$f(x) \geq \int_0^1 1\ dt + \int_1^x e^{-t}\ dt = 1 + \int_1^x e^{-t}\ dt.$$

(d) On a donc :

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ f(x) \leq 1 + \left[-e^{-t}\right]_1^x = 1 - e^{-x} + e^{-1} \leq 1 + e^{-1} = 1 + \frac{1}{e}.$$

Enfin, comme f' est positive, f est croissante et l'inégalité reste vraie pour tout x réel et f est bien majorée par $1 + \frac{1}{e}$.

f est donc croissante et majorée, elle admet une limite finie en $+\infty$ qu'on note $\int_0^\infty e^{-t^2}\ dt$.

9. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, et on définit la fonction g_n :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\ dt.$$

(a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$: le théorème fondamental de l'analyse assure alors que g_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g_n'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On remarque que :

$$\forall t \in [0,x],\ 1 + t^2 \geq 1 \quad \text{donc} \quad (1+t^2)^n \geq 1 + t^2 \quad \text{puis} \quad \frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

et on intègre entre 0 et x :

$$g_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\ dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\ dt = \arctan(x) - \arctan(0) = \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

puisque arctan est à valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$.

(c) g_n' est positive, donc g_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et majorée par $\frac{\pi}{2}$: elle admet donc une limite finie en $+\infty$, qu'on note $\int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^n}\ dt$ dans la suite du problème.

10. La fonction $t \mapsto \cos^{2n-2}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$: le théorème fondamental de l'analyse assure alors que h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, donc continue.

C. Calcul de l'intégrale de Gauss.

11. Soit $u \leq 1$, on a $0 \leq 1 - u \leq e^{-u}$ d'après l'inégalité usuelle vérifiée par exp. On compose par $x \mapsto x^n$ qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et on obtient :

$$\forall u \leq 1,\ (1-u)^n \leq e^{-nu}.$$

12. Pour $u > -1$, on a $0 < 1+u \leq e^u$ puis $(1+u)^n \leq e^{nu}$. On divise par $(1+u)^n$ et par e^{nu} et on a bien :
$$\forall u > -1,\ e^{-nu} \leq \frac{1}{(1+u)^n}.$$

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

(a) On pose $u = \tan(t)$, on a alors :
$$\int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{dt}{(1+\tan^2(t))^{n-1}} = \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{1}{(1+\tan^2(t))^n} \times (1+\tan^2(t))\, dt = \int_0^{\tan(\pi/2-\varepsilon)} \frac{1}{(1+u^2)^n}\, du.$$

(b) On remarque que $\int_0^{\tan(\pi/2-\varepsilon)} \frac{1}{(1+u^2)^n}\, du = f(\tan(\pi/2-\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt$.

Par ailleurs on remarque que :
$$\int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{dt}{(1+\tan^2(t))^{n-1}} = \int_0^{\pi/2-\varepsilon} (\cos^2(t))^{n-1}\, dt = \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \cos^{2n-2}(t)\, dt = h_n(\pi/2-\varepsilon).$$

Or h_n est continue en $\pi/2$, on a donc :
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} h_n(\pi/2-\varepsilon) = h_n(\pi/2) = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}(t)\, dt = W_{2n-2}.$$

Or ces deux quantités sont égales : par unicité de la limite, les limites sont égales et on a bien :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt = W_{2n-2}.$$

14. Soit $x \in [1, +\infty[$, on a :
$$\int_0^x e^{-nt^2}\, dt = \int_0^1 e^{-nt^2}\, dt + \int_1^x e^{-nt^2}\, dt \geq \int_0^1 e^{-nt^2}\, dt$$
car la deuxième intégrale est positive (la fonction intégrée est positive et $x \geq 1$). On utilise alors la question 1 : pour $t \in [0,1]$, $t^2 \in [0,1]$ donc $e^{-nt^2} \geq (1-t^2)^n$. On intègre et on obtient finalement :
$$\int_0^x e^{-nt^2}\, dt \geq \int_0^1 e^{-nt^2}\, dt \geq \int_0^1 (1-t^2)^n\, dt.$$

Par ailleurs, pour tout t entre 0 et x, $t^2 > -1$ donc (question 2) $e^{-nt^2} \leq \frac{1}{(1+t^2)^n}$; on intègre et on obtient :
$$\int_0^x e^{-nt^2}\, dt \leq \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt.$$

Enfin la fonction g_n est croissante donc elle est majorée par sa limite, on a donc :
$$\int_0^x e^{-nt^2}\, dt \leq \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt \leq \int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt.$$

On a bien prouvé que :
$$\forall x \in [1, +\infty[,\ \int_0^1 (1-t^2)^n\, dt \leq \int_0^x e^{-nt^2}\, dt \leq \int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt.$$

15. On remarque que :
$$\int_0^x e^{-nt^2}\, dt = \int_0^x e^{-(\sqrt{n}t)^2}\, dt = \int_0^{\sqrt{n}x} e^{-u^2} \times \frac{du}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} f(\sqrt{n}x)$$
avec le changement de variable $u = \sqrt{n}t$. On a donc :
$$\forall x \geq 1,\ \int_0^1 (1-t^2)^n\, dt \leq \frac{1}{\sqrt{n}} f(\sqrt{n}x) \leq \int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt = W_{2n-2}.$$

On passe l'inégalité à la limite et on obtient :

$$\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-t^2} \, dt \leq W_{2n-2}.$$

Reste à faire apparaître W_{2n+1} : avec le changement de variable $t = \sin(u)$, on a :

$$\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(u))^n \times \cos(u) \, du = \int_0^{\pi/2} (\cos^2(t))^n \times \cos(u) \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(t) \, dt = W_{2n+1}$$

et on a bien montré que :

$$W_{2n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-t^2} \, dt \leq W_{2n-2}.$$

16. On en déduit donc que :

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^\infty e^{-t^2} \, dt \leq \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

La partie I assure que $(2n+1) \times (W_{2n+1})^2 \to \frac{\pi}{2}$, donc :

$$n \times (W_{2n+1})^2 = \frac{n}{2n+1} \times (2n+1) \times (W_{2n+1})^2 \to \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Et comme la racine carrée est continue et W_{2n+1} est positive, on en déduit que :

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

De même on sait que $2n \times (W_{2n})^2 \to \frac{\pi}{2}$, donc $(2n-2) \times (W_{2n-2})^2 \to \frac{\pi}{2}$ et :

$$n \times (W_{2n-2})^2 = \frac{n}{2n-2} \times (2n-2) \times (W_{2n-1})^2 \to \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Et comme la racine carrée est continue et W_{2n-2} est positive, on en déduit que :

$$\sqrt{n} W_{2n-2} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On passe alors à la limite l'encadrement précédent (le terme central est indépendant de n donc sa limite est lui-même), on a donc :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \int_0^\infty e^{-t^2} \, dt \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{et enfin} \quad \int_0^\infty e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$