Devoir surveillé n° 3
7 novembre 2026

NB : les résultats doivent être encadrés en rouge et les pages doivent être numérotées.

Problème 1. Normes sur les fonctions continues sur $[0,1]$.

Dans tout le problème, on désigne par E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$.

On admet la propriété suivante, conséquence du théorème des bornes atteintes qui sera vu un peu plus tard dans l'année : **toute fonction de E est bornée**.

Une application $N : E \to \mathbb{R}$ est une norme sur E si :

- $\forall f \in E,\ N(f) \geq 0$ (positivité).
- $N(f) = 0 \Longrightarrow f = 0$ (définie positivité).
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f \in E,\ N(\lambda f) = |\lambda| \times N(f)$ (homogénéité).
- $\forall f, g \in E,\ N(f+g) \leq N(f) + N(g)$ (inégalité triangulaire).

I. La norme 1 sur les fonctions continues sur $[0,1]$.

On définit la fonction N_1 sur E par :

$$\forall f \in E,\ N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\ dt.$$

1. **Quelques exemples**.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : t \mapsto t^n$. Calculer $N_1(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Calculer $N_1(\text{ch})$ et $N_1(\text{th})$.
   (c) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note g_λ la fonction constante égale à λ. Calculer $N_1(g_\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (d) Calculer $N_1(\arcsin)$.
   (e) On pose $h : t \mapsto \frac{t+1}{t^2-t+1}$. Calculer $N_1(h)$.

2. **La stricte positivité de l'intégrale**.
   Soit f une fonction continue et positive sur $[0,1]$, telle que $\int_0^1 f(t)\ dt = 0$.
   (a) Montrer que la fonction $F : t \mapsto \int_0^x f(t)\ dt$ est croissante.
   (b) En déduire que F est nulle sur $[0,1]$.
   (c) Conclure finalement que f est nulle sur $[0,1]$.

3. Montrer soigneusement que N_1 est une norme sur E.

II. La norme infinie sur les fonctions continues sur $[0,1]$.

On définit la fonction N_∞ sur E par :

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

4. **Quelques exemples**.
   (a) Déterminer $N_\infty(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Déterminer $N_\infty(g_\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (c) Déterminer $N_\infty(\arcsin)$, $N_\infty(\arccos)$ et $N_\infty(\arctan)$.
   (d) Montrer que $N_\infty(h) = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
   (a) Justifier que :
   $$\forall x \in [0,1], \quad |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \times N_\infty(f).$$
   (b) En déduire que $N_\infty(\lambda f) \leq |\lambda| \times N_\infty(f)$.
   (c) En utilisant la question précédente pour une fonction et une constante bien choisies, montrer que $N_\infty(\lambda f) \geq |\lambda| \times N_\infty(f)$.

6. (a) Justifier que N_∞ est homogène (on n'oubliera pas de traiter le cas $\lambda = 0$).
   (b) Montrer **soigneusement** que N_∞ est positive.
   (c) Montrer **soigneusement** que N_∞ est définie positive.
   (d) Montrer **soigneusement** que N_∞ vérifie l'inégalité triangulaire.

III. Deux relations sur les normes.

Lorsque N et N' sont deux normes sur E, on dit que N est **dominée** par N', et on note $N \ \delta \ N'$, si :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \ N(x) \leq \alpha N'(x).$$

7. Montrer que la relation δ est réflexive.

8. Montrer que la relation δ est transitive.

9. Soit N une norme sur E.
   (a) Montrer que $2N$ est une norme sur E.
   (b) Montrer que $N \ \delta \ 2N$ et que $2N \ \delta \ N$.
   (c) La relation δ est-elle une relation d'ordre ?

10. (a) Montrer que $N_1 \ \delta \ N_\infty$.
    (b) Montrer que le quotient $\frac{N_1(f_n)}{N_\infty(f_n)}$ tend vers 0.
    (c) Montrer alors par l'absurde que N_∞ n'est pas dominée par N_1.
    (d) La relation δ est-elle une relation d'équivalence ?

Lorsque N et N' sont deux normes sur E, on dit que N est **équivalente** à N', et on note $N \sim N'$, si :

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \ \alpha N'(x) \leq N(x) \leq \beta N'(x).$$

11. Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.

Problème 2. Inégalités de Cauchy-Schwarz et Hardy.

L'objectif de ce problème est de montrer les deux inégalités suivantes :

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$\forall x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\in\mathbb{R},\quad \left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right).$$

- **Inégalité de Hardy** :

$$\forall a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}_+^*,\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k}\leq 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}.$$

I. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

On fixe $n\in\mathbb{N}^*$ et $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ des réels quelconques.

1. Montrer que si tous les x_k sont nuls, l'inégalité est bien vérifiée.

Dans la suite, on suppose que $x_1,\dots,x_n$ sont **non tous nuls**, et on définit la fonction S sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ S(t)=\sum_{k=1}^{n}(x_kt+y_k)^2.$$

2. Montrer qu'il existe des réels a, b et c tels que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ S(t)=at^2+bt+c$$

et déterminer une expression de chacun de a, b et c sous forme d'une somme.

3. Etudier les variations de S et déterminer sa valeur minimale m en fonction de a, b et c.

4. Justifier que m est positive ou nulle, et conclure.

II. Inégalité de Hardy

Soient $a_1,\dots,a_n$ des réels strictement positifs.

5. Justifier que :

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\quad \left(\sum_{p=1}^{k}p\right)^2\leq\left(\sum_{p=1}^{k}a_p\right)\times\left(\sum_{p=1}^{k}\frac{p^2}{a_p}\right).$$

6. En déduire que :

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\quad \frac{k}{a_1+\cdots+a_k}\leq\frac{4}{k(k+1)^2}\sum_{p=1}^{k}\frac{p^2}{a_p}.$$

7. En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1+\cdots+a_k}\leq 4\sum_{p=1}^{n}\frac{p^2}{a_p}\left(\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k(k+1)^2}\right).$$

8. Montrer que :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{2}{k(k+1)^2}\leq\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}.$$

9. En déduire que :

$$\forall p\in[\![1,n]\!],\quad \sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k(k+1)^2}\leq\frac{1}{2p^2}.$$

10. Conclure.