Devoir surveillé n° 3 - Corrigé

Problème 1. Normes sur les fonctions continues sur $[0,1]$.

I. La norme 1 sur les fonctions continues sur $[0,1]$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$N_1(f_n) = \int_0^1 |t^n| \, dt = \int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{n+1}.$$

(b) La fonction ch est toujours positive, on a alors :
$$N_1(\text{ch}) = \int_0^1 |\text{ch}(t)| \, dt = \int_0^1 \text{ch}(t) \, dt = [\text{sh}(t)]_0^1 = \text{sh}(1) = \frac{e - e^{-1}}{2} = \frac{e^2-1}{2e}.$$

La fonction sh est positivite sur $\mathbb{R}_+$, donc :
$$N_1(\text{sh}) = \int_0^1 |\text{sh}(t)| \, dt = \int_0^1 \text{sh}(t) \, dt = [\text{ch}(t)]_0^1 = \text{ch}(1) - 1 = \frac{e+e^{-1}}{2} - 1 = \frac{e^2+2e+1}{2e} = \frac{(e+1)^2}{2e}.$$

(c) On obtient immédiatement :
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ N_1(g_\lambda) = \int_0^1 |g_\lambda(t)| \, dt = \int_0^1 |\lambda| \, dt = |\lambda| \times (1-0) = |\lambda|.$$

(d) La fonction arcsin est positive sur $[0,1]$. En revanche la suite est moins immédiate, car on ne connaît pas de primitive de arcsin. On procède à une intégratioin par parties :
$$N_1(\text{arcsin}) = \int_0^1 |\arcsin(t)| \, dt = \int_0^1 \arcsin(t) \, dt = [t \arcsin(t)]_0^1 - \int_0^1 t \times \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, dt.$$

Le crochet ne pose pas de problème, et l'intégrale se calcule avec le changement de variable $u = 1 - t^2$, qui donne $du = -2t \, dt$ donc $t \, dt = \frac{-1}{2} \, du$, puis :
$$N_1(\text{arcsin}) = \arcsin(1) - \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{u}} \times \frac{-1}{2} \, dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{u}} \, du = \frac{\pi}{2} - \left[\sqrt{u}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Remarque : en fait on a un souci car la fonction arcsin n'est pas dérivable en 1 donc l'IPP n'est pas valide, et l'intégrale qui suit pose un problème en 1.

J'ai laissé la question en me disant que ça ne poserait pas de problème ; notons que le calcul qu'on a réalisé **est mathématiquement correct** : le principe se ra vu en 2e année, l'intégrale est calculée sur $[0,1[$ (ça porte le nom d'intégrale généralisée).

(e) Le numérateur est positif sur $[0,1]$, le dénominateur aussi car son discriminant est strictement négatif. Une fois la valeur absolue enlevée on gère la fraction rationnelle, en passant le dénominateur sous forme canonique :
$$\forall t \in [0,1], \ t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \left(1 + \frac{4}{3} \times \left(t - \frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{3}{4} \times \left(1 + \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right).$$

Le changement de variable $u = \frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, qui donne $du = \frac{2}{\sqrt{3}} \, dt$ puis $dt = \frac{\sqrt{3}}{2} \, du$, donne alors :
$$N_1(h) = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{t+1}{1 + \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2} \, dt = \frac{4}{3} \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1 + \frac{u\sqrt{3}+1}{2}}{1+u^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \, du = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{3 + u\sqrt{3}}{1+u^2} \, du.$$

On sépare enfin l'intégrale pour faire apparaître arctan et ln :

$$N_1(h) = \sqrt{3}\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+u^2}\,dt + \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{u}{1+u^2}\,du = \Big[\arctan(u)\Big]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\Big[\ln(1+u^2)\Big]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{3}\times\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}(\ln(4/3)-\ln(4/3)) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Remarque : on pouvait aussi obtenir $\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{u}{1+u^2}\,du$ sans calcul, car c'est l'intégrale d'une fonction impaire sur un domaine centré en 0.

2. (a) Comme f est continue sur $[0,1]$, le théorème fondamental de l'analyse assure que F est dérivable et sa dérivée est f, qui est positive : F est croissante.

   (b) Or $F(0)=\int_0^0 f(t)\,dt = 0$ et $F(1)=\int_0^1 f(t)\,dt = 0$, la croissance de F donne alors :
   $$\forall x\in[0,1], 0 = F(0)\leq F(x)\leq F(1) = 0 \quad \text{donc} \quad F(x)=0.$$

   (c) Comme F est nulle, sa dérrivée l'est aussi :
   $$\forall x\in[0,1],\ f(x) = F'(x) = 0.$$

3. - Soit $f\in E$, comme $|f(t)|\geq 0$ sur $[0,1]$, $N_(f)$ est positive ou nulle par positivité de l'intégrale.
   - On suppose que $N(f)=0$, alors $\int_0^1 |f(t)| = 0$.

     Oa $|f|$ est continue comme composée de fonctions continues, et postivite donc la question 2 donne :
     $$\forall t\in[0,1],\ f(t)=0 \quad \text{ou encore} \quad f=0.$$
   - Soit $f\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on a :
     $$N_1(\lambda f) = \int_0^1 |\lambda f(t)|\,dt = |\lambda|\int_0^1 |f(t)|\,dt = |\lambda|\times N_1(f).$$
   - Enfin, spoient $(f,g)\in E^2$, on a :
     $$N_1(f+g) = \int_0^1 |(t)+g(t)|\,dt \leq \int_0^1 (|f(t)|+|g(t)|)\,dt = \int_0^1 |f(t)|\,dt + \int_0^1 |g(t)|\,dt = N_1(f)+N_1(g).$$
   - L'application N_1 est bien positive, définie positive homogène et vérifie l'inégalité triangulaire : c'est une norme sur E.

II. La norme infinie sur les fonctions continues sur $[0,1]$.

4. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction f_n est positive sur $[0,1]$ donc $\sup(|f_n|) = \sup(f_n)$.

   De plus elle est croissante donc atteint un maximum (qui est alors sa borne supérieure) en
   $$\forall n\in\mathbb{N},\ N_\infty(f_n) = f_n(1) = 1.$$

   (b) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Il est clair que $|g_\lambda|([0,1]) = \{|\lambda|\}$, donc $N_\infty(g_\lambda) = |\lambda|$.

   (c) La fonction arcsin est positive et croissante sur $[0,1]$ donc pour les mêmes raisons que f_n, on a :
   $$N_\infty(\arcsin) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$
   La fonction arccos est positive et décroissante sur $[0,1]$ donc atteint son maximum en 0 :
   $$N_\infty(\arccos) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$
   Enfin la fonction arctan est positive et croissante sdonc :
   $$N_\infty(\arctan) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

(d) La fonction h est positive, donc $\sup(|h|) = \sup(h)$. De plus h est dérivable sur $[0,1]$ et :

$$\forall t \in [0,1],\ h'(t) = \frac{t^2 - t + 1 - (2t-1)\times(t+1)}{(t^2-t+1)^2} = \frac{-t^2-2t+2}{(t^2-t+1)^2}$$

Les racines du numérateur, dont le discriminant vaut 12, soit $\left(2\sqrt{3}\right)^2$, sont $\frac{2\pm 2\sqrt{3}}{-2} = -1 \pm \sqrt{3}$.

Or $-1-\sqrt{3}$ est strictement négatif, et $\sqrt{3}-1$ est élément de $[0,1]$ puisque $\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$: on en déduit que h' est positive entre 0 et $\sqrt{3}-1$ et négative ensuite, donc h est croissante puis décroissante : elle atteint un maximum en $\sqrt{3}-1$ et par suite :

$$N_\infty(h) = h(\sqrt{3}-1) = \frac{\sqrt{3}}{6-3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(6+3\sqrt{3}}{36-27} = \frac{9+6\sqrt{3}}{9} = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

5. (a) La borne supérieure d'une fonction est un majorant donc :

$$\forall x \in [0,1],\ |f(x)| \leq N_\infty(f) \quad \text{puis} \quad |\lambda f(x)| = |\lambda| \times |f(x)| \leq |\lambda| \times N_\infty(f).$$

(b) On en déduit que $|\lambda| \times N_\infty(f)$ est un majorant de $|\lambda f|$, et la borne supérieure est le plus petit des majorants donc :

$$N_\infty(\lambda f) \leq |\lambda| \times N_\infty(f).$$

(c) On applique la question précédente à λf et $\frac{1}{\lambda}$ et on obtient :

$$N_\infty(f) = N_\infty\left(\frac{1}{\lambda} \times \lambda f\right) \leq \frac{1}{|\lambda|} \times N_\infty(\lambda f)$$

et en multipliant par $|\lambda|$ on obtient bien :

$$N_\infty(\lambda f) \geq |\lambda| \times N_\infty(f).$$

6. (a) Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\lambda = 0$, on a $N_\infty(\lambda f) = \sup_{x\in[0,1]} |0| = 0$, et $\lambda N_\infty(f) = 0$: on a bien l'égalité.

Sinon, la question précédente assure que $N_\infty(\lambda f) \leq |\lambda| \times N_\infty(f)$ et $N_\infty(\lambda f) \geq |\lambda| \times N_\infty(f)$: on a bien $N_\infty(\lambda f) = |\lambda| \times N_\infty(f)$.

Dans tous les cas, on a bien $N_\infty(\lambda f) = |\lambda| \times N_\infty(f)$, donc N_∞ est homogène.

(b) Soit $f \in E$. Comme la borne supérieure est un majorant, on a :

$$\forall x \in [0,1],\ N_\infty(f) \geq |f(x)| \geq 0$$

donc $N_\infty(f) \geq 0$: N_∞ est positive.

Remarque : au lieu de prendre tous les x de $[0,1]$, on pouvait prendre n'importe quelle valeur : par exemple :

$$N_\infty(f) \geq |f(1/73)| \geq 0$$

(c) Soit $f \in E$, on suppose que $N_\infty(f) = 0$. On a alors :

$$\forall x \in [0,1],\ 0 \leq |f(x)| \leq N_\infty(f) = 0.$$

On en déduit que $|f(x)| = 0$ pour tout x de $[0,1]$, puis que $f(x) = 0$ sur $[0,1]$: f est la fonction nulle., et N_∞ est définie positive.

(d) Soit $(f,g) \in E^2$, on a :

$$\forall x \in [0,1],\ |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$$

donc $N_\infty(f) + N_\infty(g)$ est un majorant de $|f+g|$; or la borne supérieure est le plus petit des majorants, donc :

$$N_\infty(f+g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$$

donc N_∞ vérifie l'inégalité triangulaire.

III. Deux relations sur les normes.

7. Soit N une norme sur E. En posant $\alpha = 1$, on a bien :
$$\forall f \in E,\ N(f) \leq 1 \times N(f)$$
donc $N\ \delta\ N$: δ est réflexive.

8. Soient N, N' et N'' trois normes sur E telles que $N\ \delta\ N'$ et $N'\ \delta\ N''$: il existe α et β dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que :
$$\forall f \in E,\ N(f) \leq \alpha N'(f) \quad \text{et} \quad N'(f) \leq \beta N''(f).$$
En multipliant la deuxième inégamité par α, on obtient alors :
$$\forall f \in E,\ N(f) \leq \alpha N(f) \leq \alpha\beta N''(f)$$
et $\alpha\beta$ est élément de $\mathbb{R}_+^*$: l'existence recherchée est prouvée, donc $N\ \delta\ N''$: la relation δ est transitive.

9. (a)
- Pout tout $f \in E$, $N(f) \geq 0$ car N est une norme, donc $2N(f) \geq 0$.
- Soit $f \in E$, on suppose que $2N(f) = 0$: alors $N(f) = 0$, puis $f = 0$ car N est une norme.
- Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$$2N(\lambda f) = 2 \times |\lambda| \times N(f) = |\lambda| \times 2N(f).$$
- Soient $f, g \in E$, on a :
$$2N(f+g) = 2 \times N(f+g) \leq 2 \times (N(f) + N(g)) \leq 2N(f) + 2N(g).$$
- L'application $2N$ est donc positive, définie positive, homogène et vérifie l'inégalité triangulaire : c'est une norme sur E.

(b) Le nombre 1 est un réel strictement positif et :
$$\forall f \in E,\ N(f) \leq 1 \times 2N(f)$$
donc on a bien $N\ \delta\ 2N$.

Le nombre 2 est un réel strictement positif et :
$$\forall f \in E,\ 2N(f) \leq 2 \times N(f)$$
donc on a bien $2N\ \delta\ N$.

(c) Il est clair que $N \neq 2N$ (il suffit de les calculer en une fonction non nulle pour ne pas avoir le même résultat), on vient d'obtenir un contre-exemple à l'antisymétrie : δ n'est pas antisymétrique, ce n'est pas une relation d'ordre.

10. (a) Soit $f \in E$, alors :
$$\forall t \in [0,1],\ |f(t)| \leq N_\infty(f)$$
donc :
$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)\ dx \leq \int_0^1 N_\infty(f)\ dt = N_\infty(f) \times (1-0) = N_\infty(f)$$
donc :
$$\forall f \in E,\ N_1(f) \leq 1 \times N_\infty(f)$$
et 1 est un réel strictement positif : on en déduit que $N_1\ \delta\ N_\infty$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{N_1(f_n)}{N_\infty(f_n)} = \frac{1/(n+1)}{1} = \frac{1}{n+1}$ qui tend bien vers 0.

(c) Supposons que $N_\infty \ \delta \ N_1$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall f \in E,\ N_\infty(f) \leq \alpha N_1(f).$$

En particulier en appliquant aux fonctions f_n on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{N_1(f_n)}{N_\infty(f_n)} \geq \frac{1}{\alpha}$$

puis en passant à la limite : $\frac{1}{\alpha} \leq 0$, qui est absurde puisque α est une constante strictement positive.

On en déduit bien que N_∞ n'est pas dominée par N_1.

(d) On vient d'obtenir un contre-exemple à la symétrie : δ n'est pas symétrique, ce n'est pas une relation d'équivalence.

11.

- Soit N une norme sur E. En posant $\alpha = \beta = 1$, on a bien :

$$\forall f \in E,\ 1 \times N(f) \leq N(f) \leq 1 \times N(f)$$

donc $N \sim N$: $\sim$ est réflexive.

- Soient N et N' deux normes sur E telles que $N \sim N'$: il existe α et β dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\forall f \in E,\ \alpha N'(f) \leq N(f) \leq \beta N'(f).$$

L'inégalité de gauche donne $N'(f) \leq \frac{1}{\alpha} N(f)$ et celle de droite donne $N'(f) \geq \frac{1}{\beta} N(f)$ donc on a :

$$\forall f \in E,\ \frac{1}{\beta} N(f) \leq N'(f) \leq \frac{1}{\alpha} N(f).$$

Or $1/\beta$ et $1/\alpha$ sont des réels strictement positifs : on en déduit que $N' \sim N$, et la relation est symétrique.

- Soient N, N' et N'' trois normes sur E telles que $N \sim N'$ et $N' \sim N''$: il existe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\forall f \in E,\ \alpha N'(f) \leq N(f) \leq \beta N'(f) \quad \text{et} \quad \gamma N''(f) \leq N'(f) \leq \delta N''(f).$$

En multipliant l'inégalité de gauche du deuxième encadrement par α, et l'inégalité de droite de ce même encadrement par β, on a alors :

$$\forall f \in E,\ \alpha\gamma N''(f) \leq \alpha N'(f) \leq N(f) \leq \beta N'(f) \leq \beta\delta N''(f)$$

et en particulier :

$$\forall f \in E,\ \alpha\gamma N''(f) \leq N(f) \leq \beta\delta N''(f)$$

et $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$ sont éléments de $\mathbb{R}_+^*$: l'existence recherchée est prouvée, donc $N \ \sim N''$: la relation $\sim$ est transitive.

- La relation $\sim$ est donc réflexive, symétrique et transitive : c'est une relation d'équivalence sur E.

Problème 1. Inégalités de Cauchy-Schwarz et Hardy.

I. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

1. Si tous les x_k sont nuls, les deux côtés sont nuls : l'inégalité est bien vérifiée.

2. On développe à l'intérieur de la somme :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ S(t) = \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 t^2 + 2a_k b_k t + b_k^2) = t^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2t \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

On pose alors $a = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$, $b = 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ et $c = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$ et on a bien :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ S(t) = at^2 + bt + c$$

3. S est dérivable et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ S'(t) = 2at + b.$$

Deux cas :

- Si $a = 0$, alors S' est constante égale à b. Mais c'est absurde, car a est une somme de termes positifs donc non tous nuls : a est strictement positif.

- Si $a \neq 0$ (ce qui toujours le cas), alors S' est négative puis positive, et change de signe en $\frac{-b}{2a}$: S est décroissante avant ce point et croissante ensuite. Elle admet alors un minimum atteint en $\frac{-b}{2a}$, et sa valeur minimale vaut :

$$m = S\left(\frac{-b}{2a}\right) = a \times \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a^2} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

4. Pour tout t, $S(t)$ est une somme de termes positifs ou nuls, donc $S(t) \geq 0$. En particulier, comme m est atteinte par S, on a bien $m \geq 0$. On en déduit alors que :

$$b^2 \geq 4ac \quad \text{ou encore} \quad 4 \times \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \geq 4 \times \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

et il n'y a plus qu'à diviser par 4 pour obtenir l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

II. Inégalité de Hardy

5. Les lettres sont muettes donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\forall b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{R},\ \left(\sum_{p=1}^{k} b_p^2\right) \times \left(\sum_{p=1}^{k} c_p^2\right) \leq \left(\sum_{p=1}^{k} b_p c_p\right)^2.$$

On applique alors avec $b_p = \sqrt{a_p}$ et $c_p = \frac{p}{\sqrt{a_p}}$ pour $p \in [\![1, n]\!]$ (possible car les a_p sont strictement positifs) donc :

$$\left(\sum_{p=1}^{k} \sqrt{a_p} \times \frac{p}{\sqrt{a_p}}\right)^2 \leq \left(\sum_{p=1}^{k} \sqrt{a_p}^2\right) \times \left(\sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{\sqrt{a_p}^2}\right)$$

ou encore :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\quad \left(\sum_{p=1}^{k} p\right)^2 \leq \left(\sum_{p=1}^{k} a_p\right) \times \left(\sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}\right).$$

6. La somme sous les carré vaut $\frac{k}{k+1}2$, on a donc :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \frac{k^2(k+1)^2}{2} \leq \left(\sum_{p=1}^{k} a_p\right) \times \left(\sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}\right).$$

On divise l'inégalité par $k(k+1)^2$ qui est strictement positif, et par $\sum_{p=1}^{k} a_k$ qui l'est aussi et on obtient :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \frac{k}{\sum_{p=1}^{k} a_k} \leq \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}.$$

ce qui se réécrit bien :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leq \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}.$$

7. On somme pour k allant de 1 à n et on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}.$$

On transforme le côté droit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} \frac{4}{k(k+1)^2} \frac{p^2}{a_p}.$$

Or $\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} = \sum_{1 \leq p \leq k \leq n} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=p}^{n}$ donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=p}^{n} \frac{4}{k(k+1)^2} \frac{p^2}{a_p} = 4 \sum_{p=1}^{n} \frac{p^2}{a_p} \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2}.$$

On a bien obtenu :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leq 4 \sum_{p=1}^{n} \frac{p^2}{a_p} \left(\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2}\right).$$

8. on travaille sur le côté droit :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \geq \frac{2k}{k^2(k+1)^2} = \frac{2}{k(k+1)^2}$$

ce qui donne bien :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{2}{k(k+1)^2} \leq \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}.$$

9. Soit $p \in [\![1,n]\!]$ On somme l'inégalité précédente pour k allant de p à n et on a :

$$\sum_{k=p}^{n} \frac{2}{k(k+1)^2} \leq \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n+1}^2 \leq \frac{1}{p^2}$$

et il n'y a plus qu'à diviser par 2 pour obtenir :

$$\forall p \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2} \leq \frac{1}{2p^2}.$$

10. On multiplie par $\frac{p^2}{a_p}$ qui est positif :

$$\forall p \in [\![1,n]\!], \quad \frac{p^2}{a_p}\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k(k+1)^2} \leq \frac{1}{2a_p}.$$

On somme alors pour k allant de 1 à n et on multiplie par 4 :

$$4\sum_{p=1}^{n}\frac{p^2}{a_p}\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k(k+1)^2} \leq 4\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2a_p} = 2\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{a_p}.$$

On utilise alors la question 7 et on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1+\cdots+a_k} \leq 4\sum_{p=1}^{n}\frac{p^2}{a_p}\left(\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k(k+1)^2}\right) \leq 2\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{a_p}.$$

On enlève le terme central, et on change de lettre dans la somme de droite et on a bien :

$$\forall a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}_+^*, \ \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1+\cdots+a_k} \leq 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}.$$