- En admettant qu'elles sont dérivables respectivement sur $\mathbb{R}$, $]-1,1[$ et $]-1,1[$, calcul des dérivées de arctan, arccos et arcsin.

  - On sait que $\tan \circ \arctan = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, ou encore :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan x) = x.$$
  On dérive cette égalité (les deux côtés sont bien dérivables sur $\mathbb{R}$) et on a :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) \times \left[1 + \tan^2(\arctan x)\right] = 1$$
  Or $\tan(\arctan x) = x$ et $1 + x^2 \neq 0$ donc on peut diviser et on a :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
  - On sait que $\sin \circ \arcsin = \mathrm{id}_{[-1,1]}$, donc en restreignant à l'intervalle de dérivabilité :
  $$\forall x \in]-1,1[,\ \sin(\arcsin x) = x.$$
  On dérive cette égalité (les deux côtés sont bien dérivables sur $]-1,1[$) et on a :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \arcsin'(x) \times \cos(\arcsin x) = 1$$
  Pour calculer $\cos(\arcsin x)$, on remarque que
  $$\cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2 \quad \text{donc} \quad |\cos(\arcsin x)| = \sqrt{1-x^2}$$
  Pour enlever la valeur absolue, on cherche le signe de l'intérieur ; or $x \in]-1,1[$ donc $\arcsin x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et par suite $\cos(\arcsin x) > 0$.

  On en déduit donc que $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ et $\sqrt{1-x^2} > 0$ (car $|x| < 1$) donc on peut diviser et on a :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
  - On sait que $\cos \circ \arccos = \mathrm{id}_{[-1,1]}$, donc en restreignant à l'intervalle de dérivabilité : :
  $$\forall x \in]-1,1[,\ \cos(\arccos x) = x.$$
  On dérive cette égalité (les deux côtés sont bien dérivables sur $]-1,1[$) et on a :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \arccos'(x) \times \Big[-\sin(\arccos x)\Big] = 1$$
  Pour calculer $\sin(\arccos x)$, on remarque que
  $$\sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x) = 1 - x^2 \quad \text{donc} \quad |\sin(\arccos x)| = \sqrt{1-x^2}$$
  Pour enlever la valeur absolue, on cherche le signe de l'intérieur ; or $x \in]-1,1[$ donc $\arccos x \in]0,\pi[$ et par suite $\sin(\arccos x) > 0$.

  On en déduit donc que $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ et $\sqrt{1-x^2} > 0$ (car $|x| < 1$) donc on peut diviser et on a :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- Montrer que $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ sur $[-1,1]$.

  Posons $f : x \mapsto \arccos x + \arcsin x$ sur $[-1,1]$. f est dérivable sur $]-1,1[$ par opérations élémentaires et :
  $$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

et f est donc constante sur $]-1,1[$.

Pour calculer la constante, se place en $x=0$: on a $f(0)=\arccos(0)+\arcsin(0)=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}$ donc on obtient :

$$\forall x\in]-1,1[,\ f(x)=\frac{\pi}{2}.$$

Pour prolonger l'égalité en 1 et -1, on calcule les valeurs en -1 et 1 :

$$f(-1)=\arccos(-1)+\arcsin(-1)=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\quad\text{et}\quad f(1)=\arccos(1)+\arcsin(1)=0+\frac{\pi}{2}$$

donc on a bien :

$$\forall x\in[-1,1],\ \arccos(x)+\arcsin(x)=\frac{\pi}{2}.$$

- Simplifier $\arctan(x)+\arctan(1/x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

Posons $f:x\mapsto\arctan(x)+\arctan(1/x)$ sur $\mathbb{R}^*$. On remarque que f est impaire par imparité de la fonction arctan, donc sa valeur sur $\mathbb{R}_-^*$ se déduira de sa valeur sur $\mathbb{R}_+^*$ par symétrie. Déterminons donc une expression plus simple de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations élémentaires et :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-1}{x^2}\times\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2+\frac{x^2}{x^2}}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2+1}=0$$

et f est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour calculer la constante, se place en $x=1$: on a $f(1)=\arctan(1)+\arctan(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ donc on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \arctan(x)+\arctan(1/x)=\frac{\pi}{2}.$$

On en déduit donc que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_-^*,\ \arctan(x)+\arctan(1/x)=-\frac{\pi}{2}.$$

- Déterminer, pour $x\in\mathbb{R}$, une expression plus simple de $\cos(2\arctan x)$, $\sin(2\arctan x)$ et $\tan(2\arctan x)$.

Les formules de duplication donnent :

$$\cos(2\arctan x)=2\cos^2(\arctan x)-1.$$

Mais on sait que $\frac{1}{\cos^2}=1+\tan^2$, donc $\cos^2=\frac{1}{1+\tan^2}$ et on a donc :

$$\cos(2\arctan x)=\frac{2}{1+\tan^2(\arctan x)}-1=\frac{2}{1+x^2}-\frac{1+x^2}{1+x^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

On a également :

$$\begin{aligned}\sin(2\arctan x)&=2\sin(\arctan x)\cos(\arctan x)=2\times\frac{\sin(\arctan x)}{\cos(\arctan x)}\times\cos^2(\arctan x)\\&=2\times\tan(\arctan x)\times\frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}=\frac{2x}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Et pour finir, si $2\arctan x\notin\{-\pi/2,\pi/2\}$, donc si $\arctan x\notin\{-\pi/4,\pi/4\}$, donc si $x\notin\{-1,1\}$:

$$\tan(2\arctan x)=\frac{2\tan(\arctan x)}{1-\tan^2(\arctan x)}=\frac{2x}{1-x^2}$$

- On pose $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt$.

  1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
  2. Montrer que f est impaire.
  3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

  – On pose $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, g est définie et continue sur $\mathbb{R}$ par opérations usuelles (car $1+t^2$ est toujours strictement positif).

  Pour tout x réel, on en déduit que g est continue sur le segment $[\min(x,2x), \max(x,2x)]$, et par conséquent l'intégrale $f(x)$ est bien définie.

  – Soit $x \in \mathbb{R}$, le changement de variable $u = -t$ donne :

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+(-u)^2}} \times (-du) = -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\, du = -f(x)$$

  donc f est impaire.

  – On pose $A : x \mapsto \int_0^x g(t)\, dt$. Comme g est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème fondamental de l'analyse assure que A est une primitive de g, donc est A dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est g. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_x^{2x} g(t)\, dt = \big[A(t)\big]_x^{2x} = A(2x) - A(x)$$

  donc f est dérivable par opérations usuelles et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2A'(2x) - A'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

- On pose $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt$.

  1. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t^2 \leq t^2+1 \leq (t+1)^2$.
  2. En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln(2).$$
  3. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

  1. L'inégalité de gauche est immédiate, et celle de droite l'est presque autant après avoir développé $(t+1)^2$.

  2. On compose par la racine carrée croissante, en remarquant que t et $t+1$ sont positifs donc $\sqrt{t^2} = t$ et $\sqrt{(t+1)^2} = t+1$. On passe ensuite à l'inverse (tout est strictement positif) et on intègre pour obtenir :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \int_x^{2x} \frac{1}{t+1}\, dt \leq f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t}\, dt$$

  et il n'y a plus qu'à calculer les intégrales pour conclure.

  3. Comme $\ln(2x+1) - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{2+1/x}{1+1/x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln(2)$, le théorème d'encadrement assure que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln(2)$.

- On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

  1. Calculer I_0 et I_1.

2. Démontrer que la suite (I_n) décroissante.
3. Démontrer que (I_n) converge.
4. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
5. Calculer I_3.

1. On a
$$I_0 = \int_0^1 dx = 1$$
et
$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ et $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$.

   Pour $x \in [0,1]$, on a $(1+x^2) \geq 1$ donc $(1+x^2)^{n+1} \geq (1+x^2)^n$, puis en passant à l'inverse décroissant et en intégrant avec des bornes dans l'ordre croissant on a $I_{n+1} \leq I_n$ et la suite (I_n) est donc décroissante.

3. La fonction intégrée est positive et les bornes dans l'ordre croissant donc la suite (I_n) est positive, donc minorée par 0 et décroissante : elle converge donc vers une limite positive ou nulle.

4. On effectue une intégration par parties dans I_n, en posant $u = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ et $v = x$ qui sont de classe C^1 sur $[0,1]$, et on a :
$$I_n = \left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^1 - \int_0^1 x \times 2x \times (-n) \times (1+x^2)^{-n-1}\, dx = \frac{1}{2^n} + 2n \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx$$
   On fait apparaitre $1+x^2$ au numérateur :
$$I_n = \frac{1}{2^n} + 2n \int_0^1 \frac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx = \frac{1}{2^n} + 2n \left(\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} - \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \right) = \frac{1}{2^n} + 2n(I_n - I_{n+1})$$
   Enfin on isole I_{n+1} (uniquement pour $n \geq 1$) :
$$2nI_{n+1} = \frac{1}{2^n} + 2nI_n - I_n \quad \text{donc} \quad I_{n+1} = \frac{1}{n2^{n+1}} + \frac{(2n-1)}{2n} I_n.$$

5. On en déduit que
$$I_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} I_1 = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{2+\pi}{8}$$
puis
$$I_3 = \frac{1}{16} + \frac{3}{4} I_2 = \frac{1}{16} + \frac{6+3\pi}{32} = \frac{8+3\pi}{32}.$$