Programme de colle.

1 Théorème de bijection et étude de la réciproque.

- Théorème des valeurs intermédiaires (admis à ce stade) et théorème de bijection continue (la continuité de la réciproque est admise à ce stade).
- Etude de f^{-1} lorsque f réalise une bijection de I dans J : tableau de variation par "lecture inverse" du tableau de variation de f, détermination de l'expression par résolution de l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in I$, avec y fixé dans J, calcul de la dérivée (la dérivabilité doit être admise à ce stade) par dérivation de l'égalité $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$.
- Exemples :
  - Construction rapide des propriétés de l'exponentielle et application des techniques précédentes pour obtenir les propriétés du logarithme.
  - Construction de la racine carrée comme réciproque de la fonction induite de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ par la fonction carré.

2 Trigonométrie réciproque.

- Définition des fonctions arccos, arcsin et arctan, ensembles de définitions, simplification d'expressions faisant apparaître des fonctions trigonométriques et leurs réciproques : $\cos(\arcsin x)$, $\tan(\arccos x)$, $\arcsin(\cos(20\pi/3))$, etc...
- En particulier, calcul de $\cos(2\arctan x)$, $\sin(2\arctan x)$ et $\tan(2\arctan x)$.
- Montrer des égalités et des inégalités sur les fonctions trigonométriques réciproques à l'aide d'une étude de fonction.

3 Fonctions hyperboliques.

- Définition des fonctions ch et sh comme partie paire et partie impaire de l'exponentielle, de $= \mathrm{sh} / \mathrm{ch}$.
- Propriétés élémentaires des fonctions hyperboliques : parité, dérivabilité et dérivée, limites aux bornes.
- Quelques formules de trigonométrie hyperbolique ont été vues en classe, mais seule la formule $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$ est exigible ; les réciproques des fonctions hyperboliques sont hors programme.

4 Calcul intégral.

- Changement de variable.
- Intégration par parties.
- Calcul des intégrales de fonctions rationnelles de la forme $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$.
- Intégrales de polynomes en sinus et cosinus. Changement de variable $x = \tan(t/2)$ pour une fraction rationnelle en sinus et cosinus. Les règles de Bioche sont hors programme, tout autre changement de variable que $x = \tan(t/2)$ doit être apparent dans l'intégrale ou être donné.
- Etude d'intégrales fonctions de la borne.
- Etude de suites définies par une intégrale.

Questions de cours 1.

- En admettant qu'elles sont dérivables respectivement sur $\mathbb{R}$, $]-1,1[$ et $]-1,1[$, calcul des dérivées de arctan, arccos et arcsin.
- Montrer que $\arccos(x)+\arcsin(x)=\frac{\pi}{2}$ sur $[-1,1]$.
- Simplifier $\arctan(x)+\arctan(1/x)$ sur $\mathbb{R}^*$.
- Déterminer, pour $x\in\mathbb{R}$, une expression plus simple de $\cos(2\arctan x)$, $\sin(2\arctan x)$ et $\tan(2\arctan x)$. Pour s'entraîner à retrouver chaque formule sans avoir besoin des autres, on n'utilisera pas les formules déjà prouvées dans les suivantes.

Questions de cours 2.

Calculer une des intégrales suivantes :

- $\int_0^1 t\arctan t\ dt$.
- $\int_0^1 x\ln(1+x^2)\ dx$.
- $\int_0^2 \frac{3x}{x^2+3x+2}\ dx$.
- $\int_0^x \frac{t+3}{t^2-t+1}\ dt$.
- $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\ dx$.
- $\int_0^\pi \cos(x)e^{-x}\ dx$.

Questions de cours 3.

- On pose $f:x\mapsto\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\ dt$.
  1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
  2. Montrer que f est impaire.
  3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
- On pose $f:x\mapsto\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\ dt$.
  1. Justifier que pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $t^2\leq t^2+1\leq(t+1)^2$.
  2. En déduire que :
  $$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \ln(2x+1)-\ln(x+1)\leq f(x)\leq\ln(2).$$
  3. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- On pose :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ I_n=\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$
  1. Calculer I_0 et I_1.
  2. Démontrer que la suite (I_n) décroissante.
  3. Démontrer que (I_n) converge.
  4. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
  5. Calculer I_3.