Questions de cours.

- Retrouver à l'aide des complexes une formule de linéarisation et une formule d'anti-linéarisation (une de chaque).

–
$$\begin{aligned}\cos(a)\cos(b) &= \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\times\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2} = \frac{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}+e^{i(a-b)}+e^{i(b-a)}}{4}\\ &= \frac{2\cos(a+b)+2\cos(a-b)}{4} = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}.\end{aligned}$$

–
$$\begin{aligned}\cos(a)\sin(b) &= \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\times\frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i} = \frac{e^{i(a+b)}-e^{-i(a+b)}-e^{i(a-b)}+e^{i(b-a)}}{4}\\ &= \frac{2i\sin(a+b)+2i\sin(b-a)}{4i} = \frac{\sin(a+b)+\sin(b-a)}{2}.\end{aligned}$$

–
$$\begin{aligned}\sin(a)\sin(b) &= \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}\times\frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i} = \frac{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}-e^{i(a-b)}-e^{i(b-a)}}{-4}\\ &= \frac{2\cos(a+b)-2\cos(a-b)}{-4} = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}.\end{aligned}$$

–
$$\cos p+\cos q = \mathrm{Re}\left(e^{ip}+e^{iq}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i(p+q)/2}\left[e^{i(p-q)/2}+e^{i(q-p)/2}\right]\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i(p+q)/2}\times 2\cos((p-q)/2)\right).$$

Or $2\cos((p-q)/2)$ est un réel donc :

$$\cos p+\cos q = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\times\mathrm{Re}\left(e^{i(p+q)/2}\right) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

–
$$\sin p+\sin q = \mathrm{Im}\left(e^{ip}+e^{iq}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i(p+q)/2}\left[e^{i(p-q)/2}+e^{i(q-p)/2}\right]\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i(p+q)/2}\times 2\cos((p-q)/2)\right).$$

Or $2\cos((p-q)/2)$ est un réel donc :

$$\sin p+\sin q = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\times\mathrm{Im}\left(e^{i(p+q)/2}\right) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

–
$$\cos p-\cos q = \mathrm{Re}\left(e^{ip}-e^{iq}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i(p+q)/2}\left[e^{i(p-q)/2}-e^{i(q-p)/2}\right]\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i(p+q)/2}\times 2i\sin((p-q)/2)\right).$$

Or $2\sin((p-q)/2)$ est un réel donc :

$$\begin{aligned}\cos p-\cos q &= 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\times\mathrm{Re}\left(e^{i(p+q)/2}\times i\right) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\times\mathrm{Re}\left(e^{i(p+q)/2}\times e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\times\mathrm{Re}\left(e^{i(\pi/2+(p+q)/2)}\right) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{p+q}{2}\right)\\ &= -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{q-p}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\end{aligned}$$

–
$$\sin p-\sin q = \mathrm{Im}\left(e^{ip}-e^{iq}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i(p+q)/2}\left[e^{i(p-q)/2}-e^{i(q-p)/2}\right]\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i(p+q)/2}\times 2i\sin((p-q)/2)\right).$$

Or $2\sin((p-q)/2)$ est un réel donc :

$$\begin{aligned}\sin p - \sin q &= 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \times \text{Im}\left(e^{i(p+q)/2} \times i\right) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \times \text{Im}\left(e^{i(p+q)/2} \times e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \times \text{Im}\left(e^{i(\pi/2+(p+q)/2)}\right) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{p+q}{2}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\end{aligned}$$

- Calculer, en utilisant les complexes, $\int_0^\pi \cos(x)e^{-x}\,dx$.

  On sait que $\cos(x) = \text{Re}\left(e^{ix}\right)$ pour tout réel x, donc :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos(x)e^{-x}\,dx &= \int_0^\pi \text{Re}\left(e^{ix}\right)\,e^{-x}\,dx = \int_0^\pi \text{Re}\left(e^{ix}\times e^{-x}\right)\,dx \qquad \text{car } e^{-x} \text{ est un réel}\\ &= \text{Re}\left(\int_0^\pi e^{(i-1)x}\,dx\right) = \text{Re}\left(\left[\frac{e^{(i-1)x}}{i-1}\right]_0^\pi\right) = \text{Re}\left(\frac{e^{(i-1)\pi}-1}{i-1}\right)\\ &= \text{Re}\left(\frac{-e^{-\pi}-1}{i-1}\right) = -(1+e^{-\pi})\,\text{Re}\left(\frac{1}{i-1}\right) = -(1+e^{-\pi})\,\text{Re}\left(\frac{-i-1}{2}\right)\\ &= = -(1+e^{-\pi})\times\frac{-1}{2} = \frac{1+e^{-\pi}}{2}.\end{aligned}$$

- (d'après CCINP 89). Soint $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.
  1. Justifier que pour pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $|z^k - 1| = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
  2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

  1. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Une factorisation par angle moitié assure que :

$$z^k - 1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right) = e^{\frac{ik\pi}{n}} \times 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

  On en déduit que :

$$\forall k \in [\![0,n-1]\!],\ |z^k-1| = \left|e^{\frac{ik\pi}{n}}\right| \times 2 \times |i| \times \left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| = 1\times 2\times 1\times\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|.$$

  Enfin, comme $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a de plus $0 \leq \frac{k\pi}{n} < \frac{n\pi}{n} = \pi$, donc $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \geq 0$ et finalement :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ |z^k - 1| = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

  2. Il s'agit donc de calculer $\sum_{k=0}^{n-1} 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) &= 2\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2\sum_{k=0}^{n-1}\text{Im}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}}\right) = 2\,\text{Im}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^k\right]\\ &= 2\,\text{Im}\left(\frac{1-e^{i\frac{n\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}\right) = 2\,\text{Im}\left(\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}\right) = 4\,\text{Im}\left(\frac{1}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}\right)\end{aligned}$$

  Pour calculer la partie imaginaire, on pourrait multiplier par le conjugué du dénominateur, mais on nous demande d'arriver à $\tan(\pi/2n)$ au dénominateur : on pense donc à factoriser par angle moitié pour faire apparaître le sinus de cet angle :

$$1 - e^{i\frac{\pi}{n}} = e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}}\right) = e^{i\frac{\pi}{2n}} \times \left[-2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right]$$

et on a donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}\right) &= \frac{-1}{2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{ie^{i\frac{\pi}{2n}}}\right) = \frac{-1}{2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\mathrm{Im}\left(e^{-i\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{2}\right)}\right) = \frac{-1}{2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\times\sin\left(-\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{1}{2\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.\end{aligned}$$

et finalement :

$$S = 4\times\frac{1}{2\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

- Pour $n\geq 2$, calculer $\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega$ et $\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega$.

  On sait que $\mathcal{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$ donc :

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega = \sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k$$

  Or $e^{\frac{2i\pi}{n}}\neq 1$ puisque $0<\frac{2\pi}{n}<2\pi$ (avec $n\geq 2$ donc $2/n\leq 1$) donc :

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega = \frac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0$$

  puisque $\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n = e^{\frac{2in\pi}{n}} = e^{2i\pi} = 1$.

  On a également :

$$\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega = \prod_{k=0}^{n-1}e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^{\sum_{k=0}^{n-1}k} = \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = e^{i(n-1)\pi} = \left(e^{i\pi}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

- Représenter les racines 10-ièmes de l'unité sur le cercle trigonométrique, et expliquer sans calcul la valeur de leur somme et de leur produit.

  On trace le cercle trigonométrique, et on partage le cercle en 10 parties de même longueur, en partant de l'angle nul donc du complexe 1. Parmi les racines placées, il doit y avoir -1, la figure doit être symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

  Si on a représenté les choses correctement, pour chaque racine placée, son opposé est aussi une racine : en séparant les racines 2 par 2, on voit que la somme des racines est nulle car on peut séparer les 10 racines en 5 couples de racines opposées dont la somme est nulle.

  Si on a représenté les choses correctement, pour chaque racine placée, son conjugué, qui est aussi une racine, est aussi une racine : les 4 racines "strictement au-dessus de l'axe des abscisses" se multiplient avec leurs conjugués respectifs pour donner un produit égal à 1, puis on multiplie par 1 et par -1 : le produit vaut donc -1.

- Représenter les racines 10-ièmes de l'unité sur le cercle trigonométrique, et expliquer sans calcul la valeur de leur somme et de leur produit.

  On trace le cercle trigonométrique, et on partage le cercle en 9 parties de même longueur, en partant de l'angle nul donc du complexe 1. Parmi les racines placées, il ne doit pas y avoir -1, il doit y avoir j et j^2, et la figure doit être symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Si on a représenté les choses correctement, pour chaque racine placée, son conjugué, qui est aussi une racine, est aussi une racine : les 4 racines "strictement au-dessus de l'axe des abscisses" se multiplient avec leurs conjugués respectifs pour donner un produit égal à 1, puis on multiplie par 1 : le produit vaut donc 1.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $z^{2n+1} + z^{n+1} + z = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

On factorise par z puis on effectue un changement de variable :

$$z^{2n+1} + z^{n+1} + z = 0 \iff z(z^{2n} + z^n + 1) = 0 \iff z = 0 \text{ ou } (z^n)^2 + (z^n) + 1 = 0$$

Les solutions de $Z^2 + Z + 1 = 0$ sont j et $\overline{j}$, donc $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, on en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
z^{2n+1} + z^{n+1} + z = 0 &\iff z = 0 \text{ ou } z^n = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ ou } z^n = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\
&\iff z = 0 \text{ ou } z^n = \left(e^{i\frac{2\pi}{3n}}\right)^n \text{ ou } z^n = \left(e^{-i\frac{2\pi}{3n}}\right)^n \\
&\iff z = 0 \text{ ou } \left(\frac{z}{e^{i\frac{2\pi}{3n}}}\right)^n = 1 \text{ ou } \left(\frac{z}{e^{-i\frac{2\pi}{3n}}}\right)^n = 1 \\
&\iff z = 0 \text{ ou } \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z}{e^{i\frac{2\pi}{3n}}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \text{ ou } \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z}{e^{-i\frac{2\pi}{3n}}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
&\iff z = 0 \text{ ou } \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = e^{i\frac{2\pi}{3n}} \times e^{i\frac{2k\pi}{n}} \text{ ou } z = e^{-i\frac{2\pi}{3n}} \times e^{i\frac{2k\pi}{n}}
\end{aligned}$$

- (d'après CCINP 84). Résoudre l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ dans $\mathbb{C}$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

On veut se ramener à la forme $(...)^n = 1$, mais il faut s'assurer qu'on peut diviser.
Pour $z = i$, on a $(z+i)^n = (2i)^n = 2^n i^n$, et $(z-i)^n = 0$: ils ne sont pas égaux (le module de $2^n i^n$ vaut 2^n, il n'est donc pas nul), donc i n'est pas solution.

Pour $z \neq i$, on a :

$$\begin{aligned}
(z+i)^n = (z-i)^n &\iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = -i\left(1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right).
\end{aligned}$$

Pour isoler z il faut diviser par $1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}$; et comme $1 \in \mathbb{U}_n$, obtenu pour $k = 0$, il faut traiter cette valeur à part : pour $k = 0$ l'équation donne $0 = -2i$ qui est absurde, on retire donc cette valeur et on obtient :

$$(z+i)^n = (z-i)^n \iff \exists k \in [\![1, n-1]\!],\ z = -i \times \frac{1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}}.$$

Pour montrer que ces solutions sont des réels, on factorise par l'angle moitié au numérateur et au dénominateur :

$$-i \times \frac{1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} = -i \times \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}}} \times \frac{e^{\frac{-ik\pi}{n}} + e^{\frac{ik\pi}{n}}}{e^{-\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}} = -i \times \frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

qui est bien un réel !

Pour s'amuser, une deuxième option avec de la géométrie : si z est une solution de l'équation, alors $|z+i|^n = |z-i|^n$ puis $|z+i| = |z-i|$, donc le point d'affixe z est à égale distance des points d'affixes $(-i)$ et i, ou encore appartient à la médiatrice du segment reliant ces deux points. Or en plaçant ces deux points dans le plan, la médiatrice du segment est clairement l'axe des abscisses, c'est-à-dire l'axe des réels : z est donc nécessairement un réel.

- 1. Résoudre l'équation $\delta^2 = 8 - 6i$ d'inconnue $\delta \in \mathbb{C}$ et écrire les solutions sous forme algébrique.
  2. En déduire les solutions de l'équation $(1+i)z^2 - (2-i)z - \frac{3-7i}{8}$.

1. On résout l'équation sous forme algébrique, avec "l'astuce du module".

   On pose $\delta = a + ib$ avec a et b réels, on a alors :

   $$\delta^2 = 8 - 6i \iff a^2 - b^2 + i \times 2ab = 8 - 6i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ ab = -3 \end{cases}$$

   De plus, si δ est solution, $|\delta^2| = |8 - 6i| = \sqrt{64 + 36} = 10$, donc $|\delta|^2 = 10$, donc $a^2 + b^2 = 10$.

   En combinant avec $a^2 - b^2 = 8$, on trouve $a^2 = \frac{8+10}{2} = 9$ et $b^2 = \frac{10-8}{2} = 1$.

   On en déduit donc que $a \in \{-3, 3\}$ et $b \in \{-1, 1\}$, et comme on doit avoir $ab = -3$, a et b doivent être de signes opposés. Finalement, les deux seules solutions possibles sont $3-i$ et $i-3$; or tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées, donc $i-3$ et $3-i$ sont bien les deux racines carrées de $8-6i$.

2. On reconnaît un trinôme du second degré dont le discriminant Δ vaut :

   $$\Delta = (2-i)^2 + \frac{(1+i)(3-7i)}{2} = 4 - 1 - 4i + \frac{3 + 7 + 3i - 7i}{2} = 3 - 2i + 5 - 2i = 8 - 6i = (3-i)^2$$

   d'après la question précédente, donc les racines sont $z_{1,2} \frac{(2-i) \pm (3-i)}{2(1+i)}$, qu'on peut simplifier :

   $$z_1 = \frac{5 - 2i}{2(1+i)} = \frac{(5-2i)(1-i)}{4} = \frac{5 - 2 - 2i - 5i}{4} = \frac{3 - 7i}{4}$$

   et

   $$z_2 = \frac{-1}{2(1+i)} = \frac{-(1-i)}{4} = \frac{i-1}{4}.$$