Programme de colle.

1 Nombres complexes.

- Calculs dans les complexes : passage de la forme algébrique à la forme exponentielle et inversement, choisir la bonne forme selon les situations, utilisation du conjugué pour calculer un quotient sous forme algébrique, formules d'Euler et de Moivre, factorisations par angle moitié des expressions $e^{i\theta} \pm e^{i\theta'}$.
- Utilisations des formules ci-dessus pour retrouver les formules usuelles de trigonométrie, pour calculer une somme de cosinus et ou sinus.
- Inégalité triangulaire.
- Résolution des équations du second degré à coefficients complexes ou réels.
- Racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.
- Racines n-ième d'un nombre complexe.

Questions de cours 1 : calcul.

- Retrouver à l'aide des complexes une formule de linéarisation et une formule de délinéarisation (une de chaque).

- Calculer, en utilisant les complexes, $\int_0^\pi \cos(x)e^{-x}\,dx$.

- (d'après CCINP 89). Soint $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.
  1. Justifier que pour pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $|z^k - 1| = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
  2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

Questions de cours 2 : racines n-ièmes.

- Pour $n \geq 2$, calculer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$ et $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.

- Représenter les racines 10-ièmes de l'unité sur le cercle trigonométrique, et expliquer sans calcul la valeur de leur somme et de leur produit.

- Représenter les racines 9-ièmes de l'unité sur le cercle trigonométrique, et expliquer sans calcul la valeur de leur produit.

Questions de cours 3 : résolution d'équations.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $z^{2n+1} + z^{n+1} + z = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

- (d'après CCINP 84). Résoudre l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ dans $\mathbb{C}$ et démontrer que les solutions sont des nombres réels.

- 1. Résoudre l'équation $\delta^2 = 8 - 6i$ d'inconnue $\delta \in \mathbb{C}$ et écrire les solutions sous forme algébrique.
  2. En déduire les solutions de l'équation $(1+i)z^2 - (2-i)z - \frac{3-7i}{8}$.