- Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 2x\cos(x) + \sin(x)$.

On veut résoudre l'équation différentielle $y' + y = 2x\cos x + \sin x$.
Les solutions de $y' + y = 0$ sont :

$$y : x \mapsto Ae^{-x}, \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $f : x \mapsto (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x$, on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a\cos x - (ax+b)\sin x + c\sin x + (cx+d)\cos x$$

puis :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)+f(x) = (a+cx+d+ax+b)\cos x+(c-ax-b+cx+d)\sin x = [(a+c)x+a+b+d]\cos x+[(c-a)x+c+d-b]\sin$$

Pour que f soit solution, il suffit donc d'avoir :

$$\begin{cases} a+c=2 \\ a+b+d=0 \\ c-a=0 \\ c+d-b=1 \end{cases}$$

La troisième équation donne $c = a$, qu'on remplace dans la première pour obtenir $a = c = 1$, puis on a :

$$\begin{cases} a=1 \\ c=1 \\ b+d=-1 \\ d-b=0 \end{cases}$$

La dernière équation donne $d = b$, et on remplace dans la précédente pour obtenir $b = d = -1/2$ et enfin la fonction

$$f : x \mapsto \left(x - \frac{1}{2}\right)\cos x + \left(x - \frac{1}{2}\right)\sin x$$

est solution de $y' + y = 2x\cos(x) + \sin(x)$.

Enfin les solutions de $y' + y = 2x\cos x + \sin x$ sont :

$$y :\mapsto Ae^{-x} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\cos x + \left(x - \frac{1}{2}\right)\sin x \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

- (d'après CCINP 42). Résoudre l'équation différentielle $2ty' - 3y = \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$2ty' - 3y = \sqrt{t} \iff y' - \frac{3}{2t}y = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $y : t \mapsto Ae^{\frac{3}{2}\ln|t|}$ avec $A \in \mathbb{R}$, ou encore :

$$y_H : t \mapsto At^{3/2}, \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

On cherche alors une solution particulière par la méthode de variation de la constante, sous la forme $f : t \mapsto A(t)t^{3/2}$.

On injecte dans le premier membre de l'équation différentielle et on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(t) = A'(t)t^{3/2} + \frac{3}{2}A(t)t^{1/2} = A'(t)t^{3/2} + \frac{3}{2t}f(t)$$

donc

$$f'(t) - \frac{3}{2t}f(t) = A'(t)t^{3/2}.$$

En identifiant avec le second membre, f est solution de E si $A'(t)t^{3/2} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, ou encore si $A'(t) = \frac{1}{2t^2}$.

On peut donc choisir $A(t) = -\frac{1}{2t}$, la fonction $f : t \mapsto -\frac{1}{2t} \times t^{3/2}$, ou encore :

$$f : t \mapsto -\frac{1}{2}\sqrt{t}$$

est une solution (particulière) de l'équation avec second membre ; le cours assure alors que les solutions de l'équation avec second membre sont les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto At\sqrt{t} - \frac{1}{2}\sqrt{t}, \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

Soit alors f une solution sur $\mathbb{R}_+$; sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$, donc d'après ce qui précède, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ f(t) = At\sqrt{t} - \frac{1}{2}\sqrt{t}.$$

Par ailleurs, en évaluant en 0 dans l'équation, on a aussi :

$$0 \times f'(0) - 3 \times f(0) = 0 \text{ ‘ donc } \quad f(0) = 0.$$

On constante alors que $f(t) \xrightarrow[x\to 0, x\neq 0]{} 0$, donc f est continue en 0 ; mais en revanche on a :

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{f(t)}{t} = A\sqrt{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}} \xrightarrow[x\to 0, x\neq 0]{} -\infty$$

donc f n'est pas dérivable en 0 : c'est absurde, et il n'y a donc aucune solution sur $\mathbb{R}_+$.

- Résoudre l'équation différentielle$3(1+t^2)y' + \frac{5}{2}ty = 4t\sqrt{1+t^2}$.

  On veut résoudre l'équation différentielle $3(1+t^2)y' + \frac{5}{2}ty = 4t\sqrt{1+t^2}$.
  Cette équation se réécrit :

$$y' + \frac{5t}{6(1+t^2)}y = \frac{4t}{3\sqrt{1+t^2}}$$

Les solutions de $y' + \frac{5t}{6(1+t^2)}y = 0$ sont :

$$y : t \mapsto Ae^{-\frac{5}{12}\ln(1+t^2)}, \quad \text{ou encore } y : t \mapsto \frac{A}{(1+t^2)^{5/12}} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière par variation de la constante, sous la forme $f : t \mapsto \frac{A(t)}{(1+t^2)^{5/12}}$.
On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ f'(t) = \frac{A'(t)}{(1+t^2)^{5/12}} + A(t) \times 2t \times \frac{-5}{12}(1+t^2)^{-17/12}$$

puis :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ f'(t) + \frac{5t}{6(1+t^2)}f(t) = \frac{A'(t)}{(1+t^2)^{5/12}} - \frac{5t}{6(1+t^2)^{17/12}} + \frac{5t}{6(1+t^2)^{17/12}} = \frac{A'(t)}{(1+t^2)^{5/12}}$$

donc pour que f soit solution, il suffit d'avoir :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \frac{A'(t)}{(1+t^2)^{5/12}} = \frac{4t}{3\sqrt{1+t^2}} \quad \text{ou encore} \quad A'(t) = \frac{4}{3}t(1+t^2)^{-1/12}$$

et on peut donc prendre $A(t) = \frac{2}{3} \times \frac{(1+t^2)^{11/12}}{\frac{11}{12}} = \frac{24}{33}(1+t^2)^{11/12} = \frac{8}{11}(1+t^2)^{11/12}$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{8}{11}(1+t^2)^{11/12}(1+t^2)^{-5/12}$, ou encore $f : t \mapsto \frac{8}{11}\sqrt{1+t^2}$ est solution, et enfin les solutions de l'équation différentielle sont :

$$y : t \mapsto \frac{A}{(1+t^2)^{5/12}} + \frac{8}{11}\sqrt{1+t^2} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

- Citer et démontrer par le calcul la formule du triangle de Pascal, la formule du capitaine et la généralisation avec plusieurs capitaines.

  La formule du triangle de Pascal affirme que : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

  En effet, le côté gauche est égal à $\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$, on calcule alors le côté droit :

$$\begin{aligned}\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n-k+k+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

  La formule du capitaine affirme que $k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}$: en effet si $k < 0$, si $k = 0$ ou si $k > n$ les deux côtés sont nuls, et si $1 \leq k \leq n$ on a :

$$k\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

  Enfin la généralisation à plusieurs capitaines affirme que on a $\binom{n}{k} \times \binom{k}{i} = \binom{n}{i} \times \binom{n-i}{k-i}$: en effet si $k < 0$, $k > n$, $i < 0$ ou $i > k$ les deux côtés sont nuls, et si $0 \leq i \leq k \leq n$ on a :

$$\binom{n}{k} \times \binom{k}{i} = \frac{n!k!}{k!(n-k)!i!(k-i)!} = \frac{n!}{i!} \times \frac{1}{(k-i)!(n-k)!} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!} = \binom{n}{i} \times \binom{n-i}{k-i}.$$

- Calculer $\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k+1} 2^{k-1} 3^{n-k}$.

  On pose $k' = k+1$, on a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k+1} 2^{k-1}\, 3^{n-k} &= \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} 2^{k-2}\, 3^{n-k+1} = 2^{-2} \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} 2^{k}\, 3^{n+1-k} \\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 2^{k}\, 3^{n+1-k} - \binom{n+1}{0} 2^0 3^{n+1} - \binom{n+1}{1} \times 2 \times 3^n\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((2+3)^{n+1} - 3^{n+1} - 2(n+1)3^n\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(5^{n+1} - 3^{n+1} - 2(n+1)3^n\right).\end{aligned}$$

- Calculer $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ en utilisant la formule du capitaine.

  La formule du capitaine donne, pour $k \in [\![2, n]\!]$, $k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}$ donc on a :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} a^k b^{n-k} = n \sum_{k=2}^{n} (k-1)\binom{n-1}{k-1} a^k b^{n-k}.$$

  La formule du capitaine donne encore, pour $k \in [\![2, n]\!]$, $(k-1) \times \binom{n-1}{k-1} = (n-1) \times \binom{n-2}{k-2}$ et on a donc :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} a^k b^{n-k} = n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} a^k b^{n-k}.$$

On pose alors $k' = k-2$ et on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}a^k b^{n-k} &= n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}a^{k+2}b^{n-(k+2)}\\ &= n(n-1)a^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}a^k b^{n-2-k}\\ &= n(n-1)a^2(a+b)^{n-2}.\end{aligned}$$

- Calculer $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ en utilisant le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}X^k$.

On remarque qu'en dérivant P, on fait apparaître le k puis le $k-1$ de la somme de départ : on dérive donc P deux fois :

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}a^k b^{n-k}X^{k-1} \quad \text{puis} \quad P'' = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}a^k b^{n-k}X^{k-2}$$

et la somme cherchée est donc égale à $P''(1)$. Or on remarque avec le binôme de Newton que :

$$P = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(aX)^k b^{n-k} = (aX+b)^n$$

donc

$$P' = na(aX+b)^{n-1} \quad \text{puis} \quad P'' = n(n-1)a^2(aX+b)^{n-2}$$

et on a enfin :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = P''(1) = n(n-1)a^2(a+b)^{n-2}.$$

- Calculer $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ en utilisant le polynôme $Q = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{n-k}X^k$.

On remarque qu'en dérivant Q, on fait apparaître le k puis le $k-1$ de la somme de départ : on dérive donc Q deux fois :

$$Q' = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}b^{n-k}X^{k-1} \quad \text{puis} \quad P'' = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}b^{n-k}X^{k-2}$$

Il manque 2 à la puissance sur X pour correspondre à la somme de départ, on multiplie donc par X^2 :

$$X^2Q'' = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}b^{n-k}X^k$$

et la somme cherchée est donc égale à $a^2Q''(a)$. Or on remarque avec le binôme de Newton que :

$$Q = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k b^{n-k} = (X+b)^n$$

donc

$$Q' = n(X+b)^{n-1} \quad \text{puis} \quad Q'' = n(n-1)(X+b)^{n-2} \quad \text{puis} \quad X^2Q'' = n(n-1)X^2(X+b)^{n-2}$$

et on a enfin :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = a^2Q''(a) = n(n-1)a^2(a+b)^{n-2}.$$

- Calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ de trois manières différentes : avec le changement d'indice $k' = n-k$, en dérivant une fonction et par la formule du capitaine.

  Notons S la somme recherchée.

  – Le changement d'indice $k' = n-k$ donne :

  $$S = \sum_{k=0}^{n}(n-k)\times\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(n-k)\times\binom{n}{k} = n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - S = n2^n - S$$

  donc $2S = n2^n$, et enfin $S = n2^{n-1}$.

  – On pose $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'() = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$$

  et enfin $S = f'(1) = n2^{n-1}$.

  – Le terme $k=0$ est nul, et pour $k \geq 1$, la formule du capitaine donne $k\times\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, donc :

  $$S = \sum_{k=1}^{n-1} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n2^{n-1}.$$

- Linéariser $\cos^5(t)$ à l'aide de la formule d'Euler et de la formule du binôme.

  La formule d'Euler donne $\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ et on a donc :

$$\begin{aligned}
\cos^5(t) &= \frac{\left(e^{it}+e^{-it}\right)^5}{2^5} = \frac{\binom{5}{0}e^{-5it} + \binom{5}{1}e^{it}e^{-4it} + \binom{5}{2}e^{2it}e^{-3it} + \binom{5}{3}e^{3it}e^{-2it} + \binom{5}{4}e^{4it}e^{-it} + \binom{5}{5}e^{5it}}{2^5} \\
&= \frac{e^{-5it} + 5e^{-3it} + 10e^{-it} + 10e^{it} + 5e^{3it} + e^{5it}}{2^5} \\
&= \frac{2\cos(5t) + 10\cos(3t) + 20\cos(t)}{2^5} \\
&= \frac{\cos(5t) + 5\cos(3t) + 10\cos(t)}{16}.
\end{aligned}$$

- Ecrire $\cos(4\theta)$ sous forme d'un polynôme en $\cos(\theta)$ à l'aide de la formule de Moivre et de la formule du binôme.

  On sait (c'est la formule de Moivre que l'on retrouve) que :

$$\cos(4\theta) = \mathrm{Re}\left(e^{4i\theta}\right) = \mathrm{Re}\left[\left(e^{i\theta}\right)^4\right] = \mathrm{Re}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^4\right]$$

  Or on a :

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^4 &= \binom{4}{0}i^4\sin^4\theta + \binom{4}{1}\cos\theta i^3\sin^3\theta + \binom{4}{2}\cos^2\theta i^2\sin^2\theta + \binom{4}{3}\cos^3\theta i\sin\theta + \binom{4}{4}\cos^4\theta \\
&= \sin^4\theta - 4i\cos\theta\sin^3\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + 4i\cos^3\theta\sin\theta + \cos^4\theta \\
&= \left[\sin^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \cos^4\theta\right] + i\left[-4\cos\theta\sin^3\theta + \cos^3\theta\sin\theta\right]
\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\cos(4\theta) = \sin^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \cos^4 = (1-\cos^2\theta)^2 - 6\cos^2\theta(1-\cos^2\theta) + \cos^4\theta = P(\cos\theta)$$

à condition de poser :

$$P(X) = (1-X^2)^2 - 6X^2(1-X^2) + X^4 = (X^4 - 2X^2 + 1 - 6X^2 + 6X^4 + X^4 = 8X^3 - 8X^2 + 1.$$

- Ecrire $\cos(n\theta)$ sous forme d'un polynôme en $\cos(\theta)$ à l'aide de la formule de Moivre et de la formule du binôme.

On sait (c'est la formule de Moivre que l'on retrouve) que :

$$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left(e^{in\theta}\right) = \mathrm{Re}\left[\left(e^{i\theta}\right)^n\right] = \mathrm{Re}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^n\right]$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} i^k \sin^k(\theta)\cos^{n-k}(\theta) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k} i^{2k}\sin^{2k}(\theta)\cos^{n-2k}(\theta) + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2k+1} i^{2k+1}\sin^{2k+1}(\theta)\cos^{n-2k-1}(\theta) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}(-1)^k\sin^{2k}(\theta)\cos^{n-2k}(\theta) + i\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2k+1}(-1)^k\sin^{2k+1}(\theta)\cos^{n-2k-1}(\theta)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}(-1)^k\sin^{2k}(\theta)\cos^{n-2k}(\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}(-1)^k\left(1-\cos^2(\theta)\right)^k\cos^{n-2k}(\theta)$$