Programme de colle.

1 Equations différentielles linéaires d'ordre 1.

- Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
- Résolution d'équations homogènes d'ordre 1 (mise de l'équation sous la bonne forme, calcul d'une primitive, application de la formule du cours).
- Recherche de solution particulière sous une forme adéquate choisie sous une forme similaire au second membre pour une équation à coefficients constants.
- Recherche de solution particulière par variation de la constante dans une équation à coefficients non constants.
- Principe de superposition.
- Exemples de résolutions d'équations fonctionnelles dont la variable est dérivable par analyse/synthèse : on montre qu'une solution de l'équation de départ est nécessairement solution d'une certaine équation différentielle, on résout cette équation différentielle, puis on cherche les solutions de l'équation de départ parmi les solutions de l'équation différentielle.

2 Coefficients binomiaux.

- Définition des coefficients binomiaux, expression avec les factorielles.
- Formule du triangle de Pascal.
- Formule du binôme de Newton ; utilisation pour des calculs de sommes.
- Utilisation du binôme de Newton pour développer des expressions : linéarisation de $\cos^n(t)$ et $\sin^n(t)$ avec formule d'Euler et binôme, écriture de $\cos(nt)$ comme un polynôme en $\cos(t)$ avec formule de Moivre et binôme (les étudiants doivent être capables de le faire pour de petites valeur de n ; le cas général a été fait en classe mais les étudiants ne sont en aucun cas censés être capables de le refaire).
- Révisions générales sur le calcul de somme.

Questions de cours 1 : équations différentielles.

- Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 2x\cos(x) + \sin(x)$.
- Résoudre l'équation différentielle$3(1+t^2)y' + \frac{5}{2}ty = 4t\sqrt{1+t^2}$.
- (d'après CCINP 42). Résoudre l'équation différentielle $2ty' - 3y = \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Questions de cours 2 : coefficients binomiaux.

- Citer et démontrer par le calcul la formule du triangle de Pascal et la formule du capitaine.

  N.B. : la "formule du capitaine" est la formule $k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}$.
- Calculer $\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k+1} 2^{k-1} 3^{n-k}$.
- Calculer $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ en utilisant la formule du capitaine.
- Calculer $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ en utilisant le polynôme $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} x^k$.
- Calculer $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ en utilisant le polynôme $Q : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} x^k$.
- Calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ de trois manières différentes : avec le changement d'indice $k' = n - k$, en dérivant une fonction et par la formule du capitaine.
- Linéariser $\cos^5(t)$ à l'aide de la formule d'Euler et de la formule du binôme.
- – Version "normale".
  Ecrire $\cos(4\theta)$ sous forme d'un polynôme en $\cos(\theta)$ à l'aide de la formule de Moivre et de la formule du binôme.

  – Version "plus difficile".
  Ecrire $\cos(n\theta)$ sous forme d'un polynôme en $\cos(\theta)$ à l'aide de la formule de Moivre et de la formule du binôme.