- Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x.$$

Analyse : Si f est solution, alors pour tout x réel on a $f'(x) = e^x - f(-x)$ donc f' est dérivable par opérations usuelles. On peut alors dériver l'égalité et on a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - f'(-x) = e^x$$
Or on sait que $f'(x) + f(-x) = e^x$, donc en appliquant en $-x$ on a $f'(-x) + f(x) = e^{-x}$ et on a donc en additionnant les deux égalités :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(x) = e^x + e^{-x} = 2\,\mathrm{ch}(x)$$
donc f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 2\,\mathrm{ch}(x)$.

Résolvons alors cette équation différentielle : les solutions homogènes (on reconnaît un oscillateur harmonique) sont :
$$y : x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$
et on remarque que $\mathrm{ch}'' + \mathrm{ch} = 2\,\mathrm{ch}$, donc ch est solution de $y'' + y = 2\,\mathrm{ch}$: les solutions sont donc :
$$y : x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) + \mathrm{ch}(x)\ , \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$
et comme f est solution de $y'' + y = 2\,\mathrm{ch}$, il existe A et B réels tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + \mathrm{ch}(x).$$
On peut alors calculer :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x) + \mathrm{sh}(x)$$
puis
$$f'(x)+f(-x) = -A\sin(x)+B\cos(x)+\mathrm{sh}(x)+A\cos(x)-B\sin(x)+\mathrm{ch}(x) = (A+B)\cos(x)-(A+B)\sin(x)+e^x$$
Or f est solution, donc $f'(x) + f(-x) = e^x$, on a donc :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ (A+B)\cos(x) - (A+B)\sin(x) = 0.$$
En $x = 0$, on a alors $(A + B) \times 1 - (A + B) \times 0 = 0$, donc $A + B = 0$ puis $B = -A$ et finalement :
$$\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = A(\cos(x) - \sin(x)) + \mathrm{ch}(x).$$

Synthèse : on pose A réel et $f : x \mapsto A(\cos(x) - \sin(x)) + \mathrm{ch}(x)$ sur $\mathbb{R}$, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -A(\cos(x) + \sin(x)) + \mathrm{sh}(x) \quad \text{et} \quad f(-x) = A(\cos(x) + \sin(x)) + \mathrm{ch}(x)$$
puis
$$f'(x) + f(-x) = \mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x) = e^x$$
donc f est bien solution : les solutions sont donc :
$$f : x \mapsto A(\cos(x) - \sin(x)) + \mathrm{ch}(x) \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

- Soit (E) l'équation différentielle suivante : $t^2y'' + ty' - 9y = 6t^3$ d'inconnue $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
  1. Soit $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $z : t \mapsto y(e^t)$.
     (a) Justifier que $z \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
     (b) Exprimer y' et y'' en fonction de z, z' et z''.
     (c) Montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle du second ordre sur $\mathbb{R}$ à déterminer, qu'on notera (E').
  2. Résoudre (E').
  3. En déduire les solutions de (E).

1. (a) exp est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$: par composition, z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

   (b) Comme $z(t) = y(e^t)$ pour tout réel t et $\ln(t) \in \mathbb{R}$ pour tout $t > 0$, on a :

   $$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ y(t) = y(e^{\ln(t)}) = z(\ln(t))$$

   et tout est dérivable deux fois, on a alors :

   $$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ y'(t) = \frac{1}{t}z'(\ln(t)) \quad \text{et} \quad y''(t) = -\frac{1}{t^2}z'(\ln(t)) + \frac{1}{t^2}z''(\ln(t)).$$

   (c) On a alors :

   $$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t^2y''(t) + ty'(t) - 9y(t) = 6t^3 \iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ -z'(\ln(t)) + z''(\ln(t)) + z'(\ln(t)) - 9z(\ln(t)) = 6t^3$$

   $$\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ z''(\ln(t)) - 9z(\ln(t)) = 6t^3.$$

   Or $\mathbb{R}_+^* = \{e^t, t \in \mathbb{R}\}$, $\ln(e^t) = t$ et $(e^t)^3 = e^{3t}$ donc :

   $$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t^2y''(t) + ty'(t) - 9y(t) = 6t^3 \iff \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) - 9z(t) = 6e^{3t}$$

2. On résoud l'équation différentielle $z'' - 9z = 6e^{3t}$:
   - Les solutions de $z'' - 9z = 0$ sont (attention, ce n'est pas un oscillateur harmonique !!!) :
   $$h : t \mapsto Ae^{3t} + Be^{-3t}.$$
   - On cherche une solution particulière, on teste $f : t \mapsto Ate^{3t}$, qui est bien dérivable, puis on a pour tout réel t :
   $$f'(t) = (3At + A)e^{3t} \quad , \quad f''(t) = (9At + 6A)e^{3t} \quad , \quad f''(t) - 9h(t) = 6Ae^{3t}$$
   donc en posant $A = 1$, la fonction $f : t \mapsto te^{3t}$ est une solution de (E).
   - Les solutions de (E') sont : $z : t \mapsto Ae^{3t} + Be^{-3t} + te^{3t}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

3. On peut alors reprendre les équivalences du début pour résoudre l'équation de départ :

   $$(\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t^2y''(t) + ty'(t) - 9y(t) = 6t^3) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) - 9z(t) = 6e^{3t}$$

   $$\iff \exists A, B \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = Ae^{3t} + Be^{-3t} + te^{3t}$$

   $$\iff \exists A, B \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ y(e^t) = Ae^{3t} + Be^{-3t} + te^{3t}$$

   $$\iff \exists A, B \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ y(e^{\ln(t)}) = Ae^{3\ln(t)} + Be^{-3\ln(t)} + \ln(t)e^{3\ln(t)}$$

   $$\iff \exists A, B \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ y(t) = At^3 + \frac{B}{t^3} + t^3\ln(t).$$

   car $\mathbb{R} = \{\ln(t), t \in \mathbb{R}_+^*\}$.

- Soient a et b des réels, et f une fonction paire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
  On veut montrer que l'équation $y'' + ay = f$ admet une unique solution paire sur I vérifiant $y(0) = b$.

1. (a) Soit g une fonction paire dérivable sur $\mathbb{R}$. Justifier que $g'(0) = 0$.
   (b) En déduire qu'il existe au plus une solution au problème posé.

2. (a) Justifier qu'il existe une solution g de $y'' + ay = f$ sur I vérifiant $g(0) = b$ et $g'(0) = 0$.
   (b) Montrer que la fonction $h : x \mapsto g(-x)$ est solution de de $y'' + ay = f$.
   (c) En déduire que $h = g$, et conclure.

1. (a) La fonction g est paire, donc g' est impaire, et par suite $g'(0) = 0$.
   (b) Une solution du problème posé est solution du problème de Cauchy $y'' + ay = f$ et vérifie $y(0) = b$ et $y'(0) = 0$: il y en a donc au plus une.

2. (a) Le problème de Cauchy $y'' + ay = f$, $y(0) = b$ et $y'(0) = 0$ admet bien une solution d'après le cours.

   (b) La fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition, et on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = -g'(-x) \quad \text{puis} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) = g''(-x).$$

   On en déduit que :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) + ah(x) = g''(-x) + ag(-x).$$

   Or g est solution de $y'' + ay = f$, et $-x$ est un réel donc $g''(-x) + ag(-x) = f(-x)$; et comme f est paire on a finalement :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) + ah(x) = f(x)$$

   donc h est solution de $y'' + ay = f$.

   (c) On remarque de plus que $h(0) = g(-0) = b$, et $h'(0) = -g'(0) = -0 = 0$: h est donc solution du problème de Cauchy $y'' + ay = f$, $y(0) = b$ et $y'(0) = 0$, comme g : par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, $h = g$.

   On en déduit donc que pour tout réel x, $h(x) = g(-x) = g(x)$: g est paire, solution de $y'' + ay = f$ et vérifie $g(0) = b$: c'est l'unique solution du problème posé.

- 1. Montrer que si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ', alors $(u_n - v_n)$ converge vers $\ell - \ell'$.
  2. Montrer que la suite nulle a pour unique limite 0.
  3. Montrer l'unicité de la limite pour une suite de complexes convergente.

1. On sait que :

   $$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ |v_n - \ell'| \leq \varepsilon \end{cases}$$

   Soit alors $\varepsilon > 0$. On a :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - v_n - (\ell - \ell')| = |u_n - \ell - (v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|$$

   Comme $\varepsilon/2 > 0$, d'après ce qui précède :

   $$\begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon/2 \\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ |v_n - \ell'| \leq \varepsilon/2 \end{cases}$$

   On pose alors $n_0 = \max(n_1, n_2)$ et on a :

   $$\forall n \geq n_0,\ |u_n - v_n - (\ell - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

   donc la suite $(u_n - v_n)$ converge vers $\ell - \ell'$.

2. – Soit u la suite nulle et $\varepsilon > 0$, on a :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - 0| = 0 \leq \varepsilon$$

   donc l'inégalité $|u_n - 0| \leq \varepsilon$ est bien valide à partir d'un certain rang (le rang 0), et la suite nulle converge vers 0.

– On suppose que u (toujours la suite nulle) converge vers ℓ, montrons que $\ell = 0$.

On sait que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| = |0 - \ell| = |\ell| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que donc que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ |\ell| \leq \varepsilon$$

donc $|\ell|$ est un minorant de $\mathbb{R}_+^*$, donc $|\ell| \leq \inf(\mathbb{R}_+^*)$ et cette borne inférieure est 0, donc $|\ell| \leq 0$.

On en déduit donc que $|\ell| = 0$, puis que $\ell = 0$.

3. On suppose maintenant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et ℓ', alors $u_n - u_n \to \ell - \ell'$ par opérations usuelles, donc la suite nulle converge vers $\ell - \ell'$: d'après ce qui précède, $\ell - \ell' = 0$ puis $\ell = \ell'$.

- 1. Montrer que si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ', alors $(u_n - v_n)$ converge vers $\ell - \ell'$.
  2. Montrer que toute suite qui converge vers 0 est bornée.
  3. Montrer que la somme de deux suites bornées est bornée.
  4. Montrer que toute suite convergente est bornée.

1. On sait que :

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ |v_n - \ell'| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - v_n - (\ell - \ell')| = |u_n - \ell - (v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|$$

Comme $\varepsilon/2 > 0$, d'après ce qui précède :

$$\begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon/2 \\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ |v_n - \ell'| \leq \varepsilon/2 \end{cases}$$

On pose alors $n_0 = \max(n_1, n_2)$ et on a :

$$\forall n \geq n_0,\ |u_n - v_n - (\ell - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc la suite $(u_n - v_n)$ converge vers $\ell - \ell'$.

2. Soit u une suite telle que $u_n \to 0$, alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |u_n| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $|\varepsilon|$ à partir de n_0, puis, comme une partie de $\mathbb{R}$ de cardinal fini et non vide admet un maximum :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0-1}|, |\varepsilon|)$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

3. On suppose que (u_n) et (v_n) sont bornées, alors il existe a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ |v_n| \leq b.$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq a + b$$

donc $(u_n + v_n)$ est bornée.

4. Soit alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, on a : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}} + (\ell)_{n\in\mathbb{N}}$; or $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 par opérations usuelles donc elle est bornée, et une suite constante est bornée : (u_n) est donc la somme de deux suites bornées, donc elle est bornée.

- 1. Montrer que si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ', alors $(u_n - v_n)$ converge vers $\ell - \ell'$.
  2. Montrer que si (u_n) est négative à partir d'un certain rang et converge vers ℓ, alors $\ell \leq 0$.
  3. En déduire que si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' et $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leq \ell'$.

1. On sait que :
$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ |v_n - \ell'| \leq \varepsilon \end{cases}$$
Soit alors $\varepsilon > 0$. On a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - v_n - (\ell - \ell')| = |u_n - \ell - (v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|$$
Comme $\varepsilon/2 > 0$, d'après ce qui précède :
$$\begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon/2 \\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ |v_n - \ell'| \leq \varepsilon/2 \end{cases}$$
On pose alors $n_0 = \max(n_1, n_2)$ et on a :
$$\forall n \geq n_0,\ |u_n - v_n - (\ell - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
donc la suite $(u_n - v_n)$ converge vers $\ell - \ell'$.

2. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que (u_n) est négative à partir de n_0, et que $u_n \to \ell$, on a donc :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{puis} \quad \ell \leq u_n + \varepsilon.$$
On en déduit que pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$ on a $\ell \leq u_n + \varepsilon \leq \varepsilon$, donc :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \ell \leq \varepsilon.$$
On en déduit que ℓ minore $\mathbb{R}_+^*$, donc $\ell \leq \inf(\mathbb{R}_+^*)$, et enfin $\ell \leq 0$.

3. On suppose que : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0, u_n \leq 0$, $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$.

Alors la suite $(u_n - v_n)$ est négative à partir du rang n_0 et converge vers $\ell - \ell'$, donc d'après la première partie, $\ell - \ell' \leq 0$ puis $\ell \leq \ell'$.