Programme de colle.

1 Equations différentielles.

- Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 ou 2.
- Résolution d'équations homogènes d'ordre 1 à coefficients constants ou non constants, d'ordre 2 à coefficients constants (réels).
- Recherche de solution particulière sous une forme adéquate choisie sous une forme similaire au second membre pour une équation à coefficients constants.
- Recherche de solution particulière par variation de la constante dans une équation d'ordre 1 à coefficients non constants.
- Principe de superposition.

2 Limite d'une suite.

- Définition de la limite finie et de la limite infinie d'une suite. Suite convergente, suite divergente.
- Propriétés de la limite : unicité et passage à la limite d'une égalité, bornétude des suites convergentes, passage à la limite des inégalités.
- Opérations élémentaires sur les limites.
- Théorèmes d'existence de limite : encadrement, minoration/majoration pour les limites infinies, convergence monotone, suites adjacentes.
- Notion de suite extraite : suites extraites d'une suite convergente, utilisation par la contraposée pour montrer qu'une suite diverge, convergence d'une suite lorsque les suites extraites des termes pairs et impairs convergent vers la même limite. Théorème de Bolzano-Weierstrass, cas d'une suite non majorée et/ou non minorée (existence d'une suite extraite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$).
- Convergence d'une suite complexe : définition, caractérisation par les parties réelle et imaginaire, bornétude d'une suite convergente, opérations élémentaires.
- Caractérisations séquentielles de propriétés : densité, borne sup, borne inf.
- Expressions générales de suites récurrentes particulières : suites arithmético-géométriques, suites récurrentes linéaires d'ordre 2, suites récurrentes d'ordre 1 imbriquées.
- Expressions générales de suites récurrentes d'ordre 1 à l'aide d'un télescopage, en itérant la relation de récurrence.

Question de cours 1 : équations différentielles.

- Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x.$$

- Soit (E) l'équation différentielle suivante : $t^2y'' + ty' - 9y = 6t^3$ d'inconnue $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
  1. Soit $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $z : t \mapsto y(e^t)$.
     (a) Justifier que $z \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
     (b) Exprimer y' et y'' en fonction de z, z' et z''.
     (c) Montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle du second ordre sur $\mathbb{R}$ à déterminer, qu'on notera (E').
  2. Résoudre (E').
  3. En déduire les solutions de (E).

- Soient a et b des réels, et f une fonction paire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
  On veut montrer que l'équation $y'' + ay = f$ admet une unique solution paire sur I vérifiant $y(0) = b$.
  1. (a) Soit g une fonction paire dérivable sur $\mathbb{R}$. Justifier que $g'(0) = 0$.
     (b) En déduire qu'il existe au plus une solution au problème posé.
  2. (a) Justifier qu'il existe une solution g de $y'' + ay = f$ sur I vérifiant $g(0) = b$ et $g'(0) = 0$.
     (b) Montrer que la fonction $h : x \mapsto g(-x)$ est solution de de $y'' + ay = f$.
     (c) En déduire que $h = g$, et conclure.

Questions de cours 2 : définition de la limite.

- 1. Montrer que si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ', alors $(u_n - v_n)$ converge vers $\ell - \ell'$.
  2. Montrer que la suite nulle a pour unique limite 0.
  3. Montrer l'unicité de la limite pour une suite de complexes convergente.

- 1. Montrer que si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ', alors $(u_n - v_n)$ converge vers $\ell - \ell'$.
  2. Montrer que toute suite qui converge vers 0 est bornée.
  3. Montrer que la somme de deux suites bornées est bornée.
  4. Montrer que toute suite convergente est bornée.

- 1. Montrer que si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ', alors $(u_n - v_n)$ converge vers $\ell - \ell'$.
  2. Montrer que si (u_n) est négative à partir d'un certain rang et converge vers ℓ, alors $\ell \leq 0$.
  3. En déduire que si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' et $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leq \ell'$.