- Montrer que si (u_n) et (v_n) divergent vers $+\infty$, alors $(u_n v_n)$ diverge vers $+\infty$.

  On sait que :
  $$\begin{cases} \forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ u_n \geq A \\ \forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ v_n \geq A \end{cases}$$

  Soit $A \in \mathbb{R}$.

  Explication de ce qui suit.
  On veut minorer $u_n v_n$ par A, pour cela on peut minorer l'un par A et l'autre par 1 ; mais comme on ne connaît pas le signe de A, on va avoir du mal à multiplier les inégalités.
  On peut penser à remplacer A par $|A|$, et comme $|A| \geq A$, on aura gagné !

  D'après ce qui précède, comme $|A|$ et 1 sont des réels, on a :
  $$\begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ u_n \geq |A| \\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ v_n \geq 1 \end{cases}$$

  On pose alors $n_0 = \max(n_1, n_2)$ et on a bien (tout est positif donc on peut multiplier les inégalités) :
  $$\forall n \geq n_0,\ u_n \times v_n \geq |A| \times 1 \geq |A| \geq A$$

  donc la suite $(u_n v_n)$ diverge vers $+\infty$.

- Montrer le théorème d'encadrement.

  Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant :
  $$\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n \leq v_n \leq w_n \\ u_n \to \ell \\ v_n \to \ell \end{cases}$$

  et on veut prouver que $v_n \to \ell$. On sait que :
  $$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{donc} \quad \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2,\ |w_n - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{donc} \quad \ell - \varepsilon \leq w_n \leq \ell + \varepsilon \end{cases}$$

  Soit alors $\varepsilon > 0$. On pose $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$, on a alors :
  $$\forall n \geq n_3,\ \ell - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon$$

  et donc $|v_n - \ell| \leq \varepsilon$: la suite (v_n) converge donc vers ℓ.

- Montrer que toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$. En déduire que toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

  - Soit (u_n) une suite croissante non majorée, montrons que (u_n) diverge vers $+\infty$.

    Soit $A \in \mathbb{R}$, A n'est pas un majorant de la suite donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > A$; la croissance de la suite assure alors que :
    $$\forall n \geq n_0,\ u_n \geq u_{n_0} \geq A$$

    donc on a bien prouvé que $u_n \to +\infty$.
  - Si (u_n) est décroissante non minorée, alors $(-u_n)$ est croissante non majorée donc diverge vers $+\infty$; d'après les opérations élémentaires sur les limites, la suite $[-(-u_n)]_{n\in\mathbb{N}}$ diverge alors vers $-\infty$: on a bien montré que (u_n) diverge vers $-\infty$.

- Montrer le théorème des suites adjacentes.

  Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes : (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, et $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

  (u_n) est croissante donc admet une limite, finie ou $+\infty$.

  Par opérations usuelles, comme $v_n = (v_n - u_n) + u_n$ et $v_n - u_n \to 0$, (v_n) admet la même limite que (u_n).

  Mais comme (v_n) est décroissante, elle ne peut pas diverger vers $+\infty$: leur limite commune est bien finie.

- Montrer que toute suite croissante majorée converge. En déduire que toute suite décroissante minorée converge.

  - Soit (u_n) une suite croissante majorée, montrons que (u_n) converge.

    (u_n) est majorée donc elle admet une borne supérieure, qu'on note $\sup(u)$: montrons alors que $u_n \to \sup(u)$.

    Soit $\varepsilon > 0$, alors $\sup(u) - \varepsilon < \sup(u)$ donc $\sup(u) - \varepsilon$ n'est pas un majorant de (u_n) : on en déduit donc qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \sup(u) - \varepsilon$.

    Comme la suite (u_n) est croissante et majorée par $\sup(u)$ (qui est la borne supérieure de la suite, donc un majorant), on a alors :

    $$\forall n \geq n_0,\ \sup(u) - \varepsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq \sup(u) \leq \sup(u) + \varepsilon$$

    et par suite :

    $$\forall n \geq n_0,\ |u_n - \sup(u)| \leq \varepsilon.$$

    On en déduit bien que la suite (u_n) converge vers sa borne supérieure.
  - Si (u_n) est décroissante minorée, alors $(-u_n)$ est croissante majorée donc converge ; d'après les opérations élémentaires sur les limites, la suite $[-(-u_n)]_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors : on a bien montré que (u_n) converge.

- Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors la suite $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 0.

  Posons $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$. Comme u_n converge vers une 0, on a :

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |u_n| \leq \varepsilon$$

  On se donne alors $\varepsilon > 0$, et on cherche à majorer $|v_n|$ par ε. On a :

  $$|v_n| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

  par inégalité triangulaire. Pour utiliser ce qui précède, on sépare la somme à partir de n_0 pour laquelle on peut majorer $|u_n|$:

  $$\begin{aligned} |v_n| &\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n} |u_k| \\ &\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n} \varepsilon = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| + \frac{n-n_0+1}{n+1}\varepsilon \\ &\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k| + \varepsilon \end{aligned}$$

  On va alors majorer le premier terme par ε à partir d'un certain rang : en effet la somme est fixée (elle ne dépend plus de n) et $n+1$ tend vers l'infini, donc ce terme tend vers 0. On sait donc qu'il existe n_1 tel que, pour $n \geq n_1$, ce terme est inférieur ou égal à ε.

  On en déduit alors que pour tout $n \geq n_2 = \max(n_0, n_1)$, on a :

  $$|v_n| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

  En remplaçant ε par $\varepsilon/2$ dans le raisonnement (possible car la définition de la limite pour u_n peut s'appliquer à n'importe quel $\varepsilon' > 0$, donc à $\varepsilon/2$), on a trouvé un entier n_2 tel que :

  $$\forall n \geq n_2,\ |v_n| \leq \varepsilon$$

  ce qui prouve que (v_n) converge vers 0.

- Démontrer le lemme des pics et en déduire le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$.

  On veut montrer que toute suite réelle admet une suite extraite monotone, puis que toute suite réelle bornée admet une suite extraite convergente.

  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on dit que $p \in \mathbb{N}$ est un pic de la suite si :

  $$\forall n \geq p, u_n \leq u_p.$$

  On sépare alors deux cas.

  – S'il existe une infinité de pics, on peut noter $\psi(0)$ le premier pic, $\psi(1)$ le suivant, et plus généralement, $\psi(n)$ le $(n+1)$-ième pic : ψ est alors une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

    Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $\psi(n)$ est un pic, on a :

    $$\forall p \geq \psi(n),\ u_p \leq u_{\psi(n)}$$

    et en particulier, comme $\psi(n+1) \geq \psi(n)$, $u_{\psi(n+1)} \leq u_{\psi(n)}$: la suite $\left(u_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet bien une suite extraite monotone.

– S'il existe un nombre fini de pics, l'ensemble des pics admet un maximum P, et on a :

$$\forall n > P,\ \exists n' > n,\ u_{n'} > u_n.$$

On pose alors $\psi(0) = P + 1$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en supposant $\psi(0) < \psi(1) < \cdots < \psi(n)$ construits :

$$\psi(n+1) = \min\left(\{k > \psi(n),\ u_k > u_{\psi(n)}\}\right)$$

Ce minimum existe car $\psi(n)$ est supérieure ou égale à $\psi(0)$, donc strictement supérieure au dernier pic P : l'ensemble considéré est donc non vide, et c'est une partie de $\mathbb{N}$.

Par ailleurs, comme le minimum d'un ensemble est élément de cet ensemble, on a $\psi(n+1) > \psi(n)$ et $u_{\psi(n+1)} > u_{\psi(n)}$ pour tout n.

ψ est alors une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et la suite $\left(u_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet bien une suite extraite monotone.

D'après le lemme des pics, toute suite de réels bornée admet une suite extraite monotone, et bornée puisqu'extraite d'une suite bornée, donc convergente par théorème de la limite monotone.

- Démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}$.

On veut montrer que toute suite complexe bornée admet une suite extraite convergente.

Soit (u_n) une suite complexe bornée, posons $a_n = \mathrm{Re}(u_n)$ et $b_n = \mathrm{Im}(u_n)$ pour tout n. Les suites (a_n) et (b_n) sont alors bornées car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{a_n^2} = |a_n|$$

et de même pour (b_n) : on en déduit que tout majorant de $(|u_n|)$ est un majorant de $(|a_n|)$ et de $(|b_n|)$, donc (a_n) est (b_n) sont bornées.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$ assure alors qu'il existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(a_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

La suite $\left(b_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors bornée car extraite de la suite (b_n) bornée, donc le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$ assure qu'il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(b_{\psi\circ\phi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

La suite $\left(a_{\psi\circ\phi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge encore car elle est extraite de la suite convergente $\left(a_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et enfin la suite $\left(u_{\psi\circ\phi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge comme combinaison linéaire de suites convergentes : on a bien montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite convergente : le théorème est prouvé.

- Soient une suite u, un entier $p \in \mathbb{N}^*$, un complexe ℓ et des extractrices $\psi_1, \ldots, \psi_p$ telles que :
  – il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $[\![n_0, +\infty[\![\subset \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{Im}(\psi_i)$,
  – $\forall i \in [\![1, p]\!], u_{\psi_i(n)} \to \ell$.

  Montrer que $u_n \to \ell$.

Commes chaque $u_{\psi(n)}$ tend vers ℓ, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall i \in [\![1, p]\!],\ \exists n_i \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_i,\ |u_{\psi_i(n)} - \ell| \leq \varepsilon.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$, on fixe $n_1, \ldots, n_p$ des entiers correspondants dans les définitions de la limite ci-dessus.

Soit alors $n \geq n_0$, alors $n \in \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{Im}(\psi_i)$, donc il existe $i \in [\![1,p]\!]$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = \psi_i(k)$.

Pour assurer que $|u_{\psi_i(k)} - \ell| \leq \varepsilon$, il suffit que $k \geq n_i$, et comme ψ_i est strictement croissante, il suffit donc que $\psi_i(k) \geq \psi_i(n_i)$, ou encore $n \geq n_i$.

On prend alors $n \geq \max(n_0, \psi_1(n_1), \ldots, \psi_p(n_p))$: on a bien $n \geq n_0$ donc ce qui précède reste valable : il existe $i \in [\![1,p]\!]$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = \psi_i(k)$.
De plus $n \geq \psi_i(n_i)$, donc $k \geq n_i$: on en déduit donc que $|u_{\psi_i(k)} - \ell| \leq \varepsilon$, ou encore $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

On a donc montré que :

$$\forall n \geq \max(n_0, \psi_1(n_1), \ldots, \psi_p(n_p)),\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

et par suite $u_n \to \ell$.

Variante rigolote mais probablement encore plus technique à écrire.

Soit $\varepsilon > 0$. Commes chaque $u_{\psi(n)}$ tend vers ℓ, on a :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \exists n_i \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_i,\ |u_{\psi_i(n)} - \ell| \leq \varepsilon.$$

On en déduit alors que :

$$\forall n \in \bigcup_{i=1}^{p} \psi_i\left([\![n_i, +\infty[\![\right),\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Il reste à montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $[\![N, +\infty[\![\subset \bigcup_{i=1}^{p} \psi_i\left([\![n_i, +\infty[\![\right)$. Mais on remarque que :

$$\left(\bigcup_{i=1}^{p} \psi_i\left([\![n_i, +\infty[\![\right)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{p} \psi_i\left([\![0, n_i[\![\right)\right) = \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{Im}(\psi_i) \supset [\![n_0, +\infty[\![$$

et $\bigcup_{i=1}^{p} \psi_i\left([\![0, n_i[\![\right)$ est de cardinal fini (réunion de p ensembles de cardinaux finis) donc admet un maximum, qu'on peut noter a : les entiers supérieurs ou égaux à n_0 et à $a+1$ sont alors éléments de $\left(\bigcup_{i=1}^{p} \psi_i\left([\![n_i, +\infty[\![\right)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{p} \psi_i\left([\![0, n_i[\![\right)\right)$ mais pas de $\bigcup_{i=1}^{p} \psi_i\left([\![0, n_i[\![\right)$, donc ils sont nécessairement éléments de $\bigcup_{i=1}^{p} \psi_i\left([\![n_i, +\infty[\![\right)$:

$$\bigcup_{i=1}^{p} \psi_i\left([\![n_i, +\infty[\![\right) \supset [\![\max(a+1, n_0), +\infty[\![$$

et par suite :

$$\forall n \geq \max(a+1, n_0),\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

donc $u_n \to \ell$.