Programme de colle.

1 Limite d'une suite.

- Définition de la limite finie et de la limite infinie d'une suite. Suite convergente, suite divergente.
- Propriétés de la limite : unicité et passage à la limite d'une égalité, bornétude des suites convergentes, passage à la limite des inégalités.
- Opérations élémentaires sur les limites.
- Théorèmes d'existence de limite : encadrement, minoration/majoration pour les limites infinies, convergence monotone, suites adjacentes.
- Notion de suite extraite : suites extraites d'une suite convergente, utilisation par la contraposée pour montrer qu'une suite diverge, convergence d'une suite lorsque les suites extraites des termes pairs et impairs convergent vers la même limite. Théorème de Bolzano-Weierstrass, cas d'une suite non majorée et/ou non minorée (existence d'une suite extraite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$).
- Convergence d'une suite complexe : définition, caractérisation par les parties réelle et imaginaire, bornétude d'une suite convergente, opérations élémentaires.
- Caractérisations séquentielles de propriétés : densité, borne sup, borne inf.
- Expressions générales de suites récurrentes particulières : suites arithmético-géométriques, suites récurrentes linéaires d'ordre 2, suites récurrentes d'ordre 1 imbriquées.
- Expressions générales de suites récurrentes d'ordre 1 à l'aide d'un télescopage, en itérant la relation de récurrence.

Pour s'échauffer.

Déterminer le terme général definie par un premier terme donné et une relation de récurrence du type suivant :

- arithmético-géométrique.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \alpha(n+p)u_n$ avec α constante non nulle et p entier strictement positif.

Fin de l'échauffement.

Déterminer le terme général definie par un premier terme donné et une relation de récurrence du type suivant :

- récurrente linéaire d'ordre 2.
- deux suites récurrentes linéaires d'ordre 1 imbriquées.

Questions de cours.

- Montrer que si (u_n) et (v_n) divergent vers $+\infty$, alors $(u_n v_n)$ diverge vers $+\infty$.
- Montrer le théorème d'encadrement.
- Montrer que toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$. En déduire que toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.
- Montrer le théorème des suites adjacentes.

Questions plus difficiles (uniquement à la demande de l'étudiant).

- Montrer que toute suite croissante majorée converge. En déduire que toute suite décroissante minorée converge.
- Démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}$ (le théorème dans $\mathbb{R}$ est supposé déjà connu).
- Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors la suite $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 0.
- Démontrer le lemme des pics et en déduire le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$.
- Soient une suite u, un entier $p \in \mathbb{N}^*$, un complexe ℓ et des extractrices $\psi_1, \dots, \psi_p$ telles que :
  - il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $[\![n_0, +\infty[\![\subset \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{Im}(\psi_i)$,
  - $\forall i \in [\![1, p]\!], u_{\psi_i(n)} \to \ell$.

  Montrer que $u_n \to \ell$.