Contrôle Durée : 50 mn

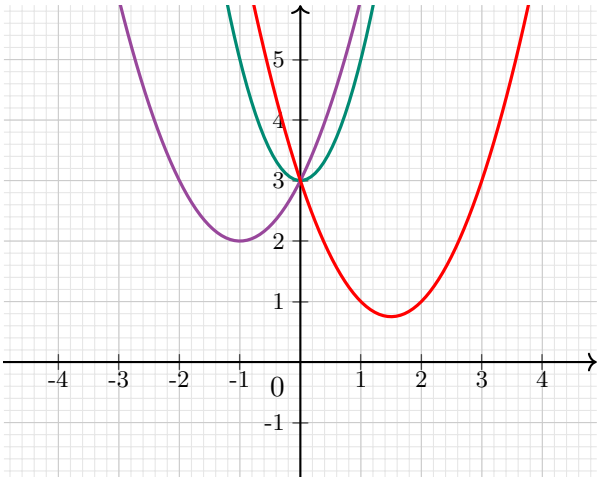
Second degré

Calculatrice autorisée.

Exercice 1 ..... 6 points

Dans cet exercice, les notations habituelles a, b, c, α, β et Δ sont utilisées pour un polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Sur le graphique ci-dessous, tracer la courbe représentative d'une fonction polynomiale de degré 2 vérifiant simultanément les trois conditions suivantes : $a > 0$, $\Delta < 0$ **et** $c = 3$.



Solution
On attend une parabole "ouverte" vers le haut ($a > 0$), qui ne coupe **jamais** l'axe des abscisses ($\Delta < 0$, elle est donc strictement au-dessus de l'axe) et qui coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; 3)$ (puisque $c = 3$).
Trois exemples de courbes acceptées ont été tracés.

2. Une fonction polynomiale g du second degré admet un maximum égal à 5 atteint pour $x = 1$. De plus, sa courbe représentative coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3.

   Déterminer une expression de la fonction g.

Solution
Le sommet de la parabole est $S(1; 5)$,
donc la forme canonique est pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = a(x-1)^2 + 5$.
De plus, la courbe coupe l'axe des ordonnées en 3, donc $g(0) = 3$.
Or

$$a(0-1)^2 + 5 = 3 \iff a \times 1 + 5 = 3 \iff a = -2$$

Une expression est donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = -2(x-1)^2 + 5$.

3. Soit le polynôme $P(x) = -3x^2 + bx + 2$ avec b un nombre réel.

   Dans le cas où ce polynôme admet deux racines réelles distinctes, que peut-on dire à propos des signes des racines.

Solution
On suppose que $P(x)$ a exactement deux racines réelles distinctes notées x_1 et x_2.
On connaît la relation du produit des racines : $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$. avec ici, $a = -3$ et $c = 2$,
donc

$$x_1 \times x_2 = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

Le produit des racines étant strictement négatif, les racines ne peuvent pas être de mêmes signes et sont donc de signes contraires.

Exercice 2 ..... 6 points

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$2x^2 - 5x - 3 \geqslant x^2 - 4x + 9$$

Solution
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2x^2 - 5x - 3 \geqslant x^2 - 4x + 9 \iff 2x^2 - 5x - 3 - x^2 + 4x - 9 \geqslant 0 \iff x^2 - x - 12 \geqslant 0$$

$x^2 - x - 12$ est un polynôme du second degré avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = -12$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 1 + 48 = 49$$

Donc $\Delta > 0$, et $x^2 - x - 12$ a exactement deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \times 1} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \times 1} = 4$$

Or $a = 1$ donc $a > 0$,
donc

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
Signe de $x^2 - x - 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est $S =]-\infty; -3] \cup [4; +\infty[$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$x^3 - 2x^2 - 8x = 0$$

Solution
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^3 - 2x^2 - 8x = 0 \iff x(x^2 - 2x - 8) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un des facteurs est nul. On a donc :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 2x - 8 = 0$$

Pour l'équation du second degré $x^2 - 2x - 8 = 0$, on a $a = 1$, $b = -2$ et $c = -8$.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 4 + 32 = 36$$

Comme $\Delta > 0$, cette équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{2 - 6}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{2 + 6}{2} = 4$$

L'ensemble des solutions de l'équation globale dans $\mathbb{R}$ est donc :

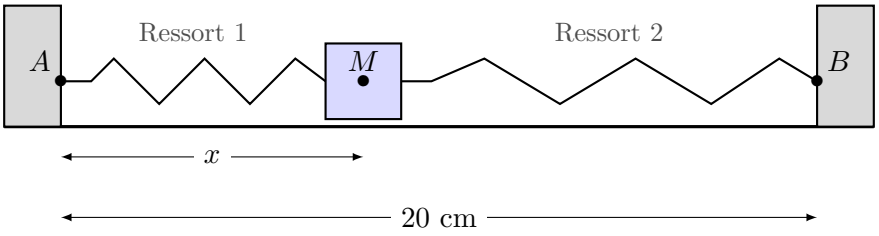
$$S = \{-2\,;\,0\,;\,4\}$$

Exercice 3 ..... 8 points

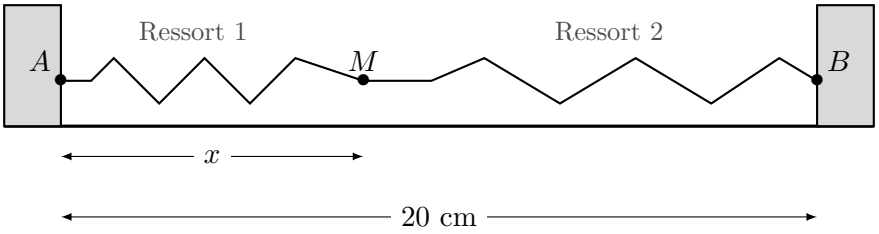
Dans un mécanisme industriel disposé à l'horizontale :

- une pièce mobile, associée à son centre M, coulisse sur un axe rectiligne horizontal entre deux parois fixes distantes de 20 cm ;
- la pièce est maintenue de part et d'autre par deux ressorts attachés aux parois aux points A et B ;
- les ordonnées des points A, B et M sont égales ;
- on note x la distance AM en cm ;
- afin de faciliter les calculs, on considèrera que x peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $[0\,;20]$ et que les ressorts sont directement accrochés au point M.

« Réalité » :



Modélisation :



L'énergie mécanique (en milliJoules, mJ) stockée dans un ressort dépend de sa tension, et donc de la position de M. Pour ce système :

- L'énergie du ressort 1 est modélisée, pour tout $x \in [0\,;20]$, par $E_1(x) = 2x^2$
- L'énergie du ressort 2 est modélisée, pour tout $x \in [0\,;20]$, par $E_2(x) = 3(20-x)^2$

La physique nous apprend que la pièce va naturellement se stabiliser à la position d'équilibre qui **minimise l'énergie totale** du système, notée $E(x) = E_1(x) + E_2(x)$.

1. Montrer que l'énergie totale du système s'exprime pour tout $x \in [0\,;20]$, par : $E(x) = 5x^2 - 120x + 1\,200$.

Solution
Pour tout $x \in [0\,;20]$,

$$\begin{aligned} E(x) &= 2x^2 + 3(20-x)^2 \\ &= 2x^2 + 3(400 - 40x + x^2) \\ &= 2x^2 + 1200 - 120x + 3x^2 \\ E(x) &= 5x^2 - 120x + 1\,200 \end{aligned}$$

2. Dresser le tableau de variations de la fonction E sur l'intervalle $[0\,;20]$.

Solution
La fonction E est polynomiale du second degré avec $a = 5$, $b = -120$ et $c = 1\,200$.

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-120)}{2 \times 5} = \frac{120}{10} = 12$$

$$\beta = E(12) = 5(12)^2 - 120(12) + 1200 = 5 \times 144 - 1440 + 1200 = 720 - 1440 + 1200 = 480$$

de plus $a > 0$,
donc

x	0	12	20
Variations de E	1 200	480	800

On calcule aussi les valeurs aux bornes de l'intervalle :
$E(0) = 1200$ et $E(20) = 5(400) - 120(20) + 1200 = 2000 - 2400 + 1200 = 800$.

3. En déduire l'abscisse du point M lorsque la pièce est à sa position d'équilibre.

   Quelle est alors la valeur de cette énergie totale du système ?

Solution
D'après le tableau de variations, l'énergie totale est minimale pour $x = 12$. La position d'équilibre de la pièce est donc située à 12 cm du mur A. La valeur de cette énergie totale minimale est alors de 480 mJ.

4. Pour une opération de calibrage, un technicien souhaite tirer manuellement la pièce M de sorte que l'énergie totale du système soit exactement de 500 mJ. (Les points A et B sont fixes, seul le point M est bougé par le technicien)

   Quelles sont les abscisses des positions de M qui permettent d'atteindre exactement cette énergie ?

Solution
On cherche à résoudre l'équation $E(x) = 500$ sur $[0\,;20]$.
Or pour tout $x \in [0\,;20]$

$$E(x) = 500 \iff 5x^2 - 120x + 1200 = 500 \iff 5x^2 - 120x + 700 = 0$$

Cette équation est une équation du second degré avec $a = 5$, $b = -120$ et $c = 700$.

$$\Delta = (-120)^2 - 4 \times 5 \times 700 = 400$$

Donc $\Delta > 0$ et l'équation a deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-120) - \sqrt{400}}{2 \times 5} = 10 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-120) + \sqrt{400}}{2 \times 5} = 14$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{10\ 14\}$.
Donc, pour que l'énergie soit de 500 mJ, le technicien doit positionner la pièce soit à **10 cm**, soit à **14 cm** du mur A.