Contrôle Durée : 50 mn

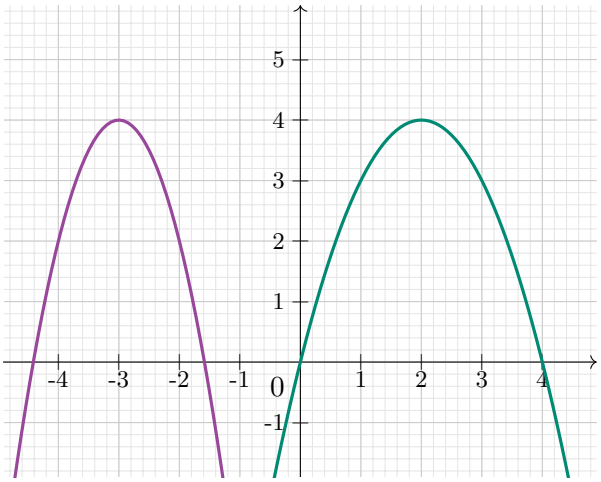
Second degré

Calculatrice autorisée.

Exercice 1 ..... 6 points

Dans cet exercice, les notations habituelles a, b, c, α, β et Δ sont utilisées.

1. Sur le graphique ci-dessous, tracer la courbe représentative d'une fonction polynomiale de degré 2 vérifiant simultanément les conditions suivantes : $\Delta > 0$, $a < 0$ **et** $\beta = 4$.



Solution

On attend une parabole "ouverte" vers le bas ($a < 0$), qui coupe l'axe des abscisses en deux points distincts ($\Delta > 0$) et dont le sommet a pour ordonnée 4 ($\beta = 4$). La valeur de l'abscisse α du sommet peut être choisie librement.
Deux exemples de bonnes réponses ont été tracés.

2. Déterminer l'expression développée de la fonction polynômiale g du second degré, définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant :
   - cette fonction polynomiale admet deux racines réelles distinctes ;
   - le produit de ses racines vaut 5 ;
   - la somme de ses racines vaut 6 ;
   - son coefficient dominant a est -2.

Solution

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2 + bx + c$, la somme des racines est $S = -\dfrac{b}{a}$ et le produit est $P = \dfrac{c}{a}$.
Or $a = -2$, $S = 6$ et $P = 5$.
Ainsi, $-\dfrac{b}{-2} = 6 \iff \dfrac{b}{2} = 6 \iff b = 12$.
De même, $\dfrac{c}{-2} = 5 \iff c = -10$.
L'expression cherchée est donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = -2x^2 + 12x - 10$$

3. Soit f une fonction polynômiale de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$, dont la courbe représentative coupe l'axe des abscisses aux points $A(-1\,;0)$ et $B(3\,;0)$ et passe par le point $C(0;-6)$.

   a. Déterminer la forme factorisée de f sur $\mathbb{R}$.

Solution
f est une fonction polynômiale de degré 2, dont la courbe représentative coupe l'axe des abscisses aux points $A(-1\,;0)$ et $B(3\,;0)$,
donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$ sont les racines du polynôme $f(x)$,
donc la forme factorisée de f s'écrit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x + 1)(x - 3)$$

De plus, la courbe passe par $A(0;-6)$, ce qui signifie que $f(0) = -6$.
Or

$$f(0) = -6 \iff a(0+1)(0-3) = -6 \iff a \times 1 \times (-3) = -6 \iff -3a = -6 \iff a = 2$$

La forme factorisée de f sur $\mathbb{R}$ est donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$$

   b. En déduire la forme développée de l'expression de f sur $\mathbb{R}$.

Solution
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = 2(x + 1)(x - 3) = 2(x^2 - 3x + x - 3) = 2(x^2 - 2x - 3) = 2x^2 - 4x - 6$$

Exercice 2 ..... 6 points

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$-3x^2 + 2x + 4 \geqslant -4$$

Solution
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-3x^2 + 2x + 4 \geqslant -4 \iff -3x^2 + 2x + 8 \geqslant 0$$

On pose $P(x) = -3x^2 + 2x + 8$. C'est un trinôme du second degré avec $a = -3$, $b = 2$, $c = 8$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-3) \times 8 = 4 + 96 = 100$$

$\Delta > 0$, le trinôme admet exactement deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 10}{-6} = \frac{-12}{-6} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 10}{-6} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$$

Or $a < 0$,
Donc le tableau de signes de $P(x)$ est

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est $S = \left[-\frac{4}{3}; 2\right]$.

2. Soit f la fonction polynomiale du second degré dont une expression est, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = 2x^2 + b\,x + 2 \quad \text{avec } b \in \mathbb{R}$$

Déterminer toutes les valeurs de b pour lesquelles l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions réelles distinctes.

Solution
f est une fonction polynomiale de degré 2 avec $a = 2$ et $c = 2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4 \times 2 \times 2 = b^2 - 16$$

Donc

$$\Delta > 0 \iff b^2 - 16 > 0 \iff b^2 > 16 \iff b > 4 \text{ ou } b < -4$$

Donc $f(x) = 0$ a deux solutions réelles distinctes si et seulement si $b \in]-\infty\,;-4] \cup [4\,;+\infty[$.

Exercice 3 ..... 8 points

Lors d'un match de tennis, un joueur tente de surprendre son adversaire monté au filet en effectuant un « lob » (un coup frappé en cloche pour faire passer la balle au-dessus de son adversaire).
On considère, pour notre modélisation, que :

- Le joueur lâche et frappe la balle lorsqu'elle est au-dessus de sa ligne de fond de court, soit au point B d'abscisse 0 dans notre repère ;
- La ligne de fond de court adverse est située à exactement 14 mètres du joueur ;
- Un filet d'une hauteur de 0,9 mètre est installé au milieu du terrain à $x = 7$ mètres ;
- La trajectoire du centre de la balle est modélisée par la fonction h définie pour tout réel positif $x \in [0; 14]$ par :

$$h(x) = -0,05x^2 + 0,6x + 1,4$$

où x représente la distance horizontale au sol depuis le joueur (en mètres), et $h(x)$ représente la hauteur du centre de la balle (en mètres).

1. Calculer l'ordonnée du point B, et en déduire la hauteur à laquelle la balle est frappée par le joueur.

Solution
B a pour abscisse 0 et pour ordonnée $h(0)$
Or

$$h(0) = -0,05 \times 0^2 + 0,6 \times 0 + 1,4 = 1,4$$

L'ordonnée de B est donc $1,4$.
La balle est donc frappée à une hauteur de $1,4$ mètre.

2. a. En justifiant votre démarche, dresser le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;14]$.

Solution
h est une fonction polynômiale du second degré avec $a = -0,05$ donc $a < 0$ et sa courbe représentative de h est une parabole "ouverte" vers le bas et présente un maximum au sommet $S(\alpha;\beta)$.

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-0,6}{2 \times (-0,05)} = \frac{-0,6}{-0,1} = 6$$

$$\beta = h(\alpha) = h(6) = -0,05 \times 6^2 + 0,6 \times 6 + 1,4 = -1,8 + 3,6 + 1,4 = 3,2$$

x	0	6	14
Variations de h	1,4	$\nearrow$ 3,2	$\searrow$ 0

$f(14) = -0{,}05 \times 14^2 + 0{,}6 \times 14 + 1{,}4 = 0$

b. Quelle est la hauteur maximale atteinte par la balle lors de ce lancer ? À quelle distance au sol du joueur est-elle atteinte ?

Solution
D'après le tableau de variations, la hauteur maximale de la balle est de $3,2$ mètres, et elle est atteinte à une distance horizontale de 6 mètres du joueur.

3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $-0{,}05x^2 + 0{,}6x + 1{,}4 = 0$.

Solution
$h(x) = 0$ est une équation du second degré avec $a = -0,05$, $b = 0,6$ et $c = 1,4$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0,6^2 - 4 \times (-0,05) \times 1,4 = 0,64$$

Donc $\Delta > 0$ et l'équation a exactement deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0,6 - \sqrt{0,64}}{2(-0,05)} = 14$$

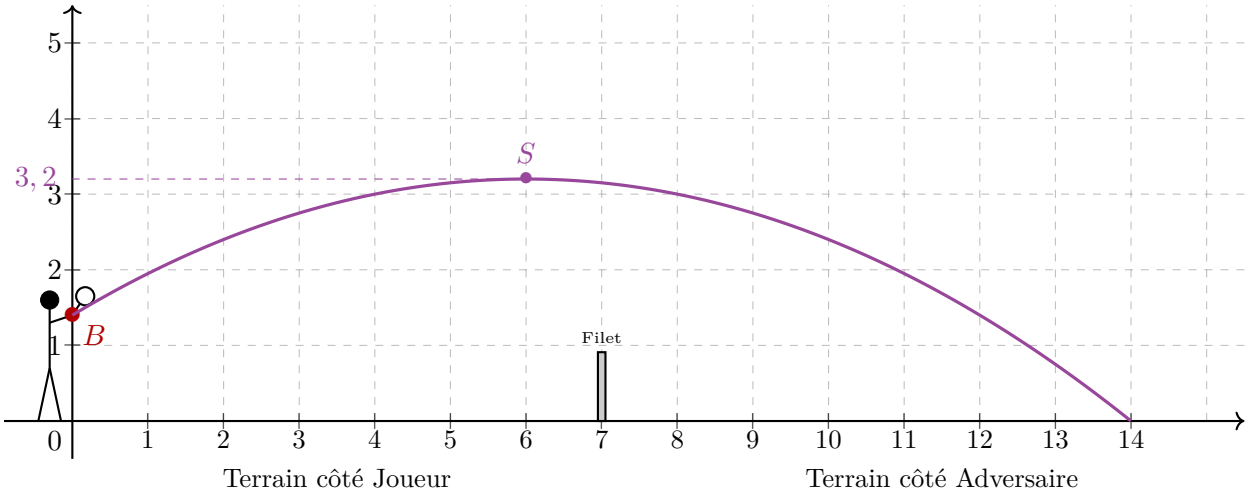
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0,6 + \sqrt{0,64}}{2(-0,05)} = -2$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{-2\,;14\}$.

b. Sachant que le coup est considéré comme « bon » s'il retombe sur ou avant la ligne de fond adverse (à 14 mètres), le joueur va-t-il réussir son coup sans que la balle ne sorte des limites du terrain ? (On considère dans cette question que l'adversaire n'intercepte pas la balle)

Solution
La balee touche le sol si et seulement si $h(x) = 0$.
Or d'après la question précédente : $h(x) = 0 \iff x = -2$ ou $x = 14$.
Dans notre modélisation, $x = -2$ n'a pas de sens, donc la balle touche le sol à exactement 14 mètres. Le coup est donc parfaitement réussi (elle retombe pile sur la ligne).

4. Tracer, sur le graphique ci-dessous, en faisant apparaitre les informations déjà trouvées, la trajectoire de la balle jusqu'à ce qu'elle touche le sol.



5. Dans cette question, l'adversaire monté au filet va tenter d'intercepter la balle au vol.

   a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

   $$-0,05x^2 + 0,6x + 1,4 = 2,4$$

   Solution

   $$-0,05x^2 + 0,6x + 1,4 = 2,4 \iff -0,05x^2 + 0,6x - 1 = 0$$

   $-0,05x^2 + 0,6x - 1$ est un polynôme du second degré avec $a = -0,05$, $b = 0,6$ et $c = -1$, donc

   $$\Delta = b^2 - 4ac = 0,6^2 - 4 \times (-0,05) \times (-1) = 0,36 - 0,2 = 0,16$$

   $\Delta > 0$, l'équation admet exactement deux solutions réelles distinctes ($\sqrt{0,16} = 0,4$) :

   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0,6 - 0,4}{2 \times (-0,05)} = \frac{-1}{-0,1} = 10$$

   $$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0,6 + 0,4}{-0,1} = \frac{-0,2}{-0,1} = 2$$

   L'ensemble des solutions de cette équation est $\{2; 10\}$.

   b. On considère, pour la modélisation, que l'adversaire est fixe à une distance au sol de 10 mètres du joueur, qu'il saute en tendant les bras et sa raquette vers le haut, et qu'il peut ainsi intercepter toute balle située à une hauteur inférieure ou égale à 2,5 mètres.
   Déduire de la question précédente si le lob va être contré ou si la balle va réussir à passer au-dessus de l'adversaire.

   Solution
   D'après la question 5.a, à la distance horizontale $x = 10$ mètres, la hauteur de la balle est exactement égale à 2,4 mètres (puisque 10 est solution de l'équation $h(x) = 2,4$). Or, l'adversaire peut intercepter toutes les balles jusqu'à une hauteur de 2,5 mètres. Comme $2,4 \leqslant 2,5$, la balle passe à portée de sa raquette : **le tir va être contré par l'adversaire**.