Correction **Durée : 50 mn**

Suites numériques

Calculatrice autorisée.

Exercice 1

Par lecture graphique :

- Les points correspondants à la suite (u_n) ne sont pas alignés, il ne s'agit donc pas d'une suite arithmétique. Les premiers points ont pour coordonnées $(0\,;1)$, $(1\,;1,5)$ et $(2\,;2,25)$.

  On remarque que $1 \times 1,5 = 1,5$ et $1,5 \times 1,5 = 2,25$.

  Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,5$ et de premier terme $u_0 = 1$.

- Les points correspondants à la suite (v_n) sont alignés sur une droite passant par les points de coordonnées $(0\,;8)$ et $(3\,;7)$. Le coefficient directeur de cette droite est $\dfrac{7-8}{3-0} = -\dfrac{1}{3}$.

  Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = 8$.

- Les points correspondants à la suite (w_n) ne sont pas alignés. Les premiers points ont pour coordonnées $(0\,;6)$, $(1\,;3)$ et $(2\,;1,5)$.

  On remarque que $6 \times 0,5 = 3$ et $3 \times 0,5 = 1,5$.

  Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $w_0 = 6$.

Exercice 2

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 1$,

   donc $n > 0$ et $n + 1 > 0$,

   donc le quotient $\dfrac{n}{n+1}$ est strictement positif.

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\dfrac{n+1}{(n+1)+1}}{\dfrac{n}{n+1}} \\
&= \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n+1}{n} \\
&= \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} \\
&= \frac{n^2+2n}{n^2+2n} + \frac{1}{n^2+2n} \\
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= 1 + \frac{1}{n^2+2n}
\end{aligned}$$

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{n^2+2n}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 + 2n > 0$,
   donc $\dfrac{1}{n^2+2n} > 0$,
   donc $1 + \dfrac{1}{n^2+2n} > 1$.
   On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
   Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} > u_n$.
   Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 3

1. Les émissions du Plan A diminuent de 5 kt par an,
   Or $A_0 = 120$,
   Donc $A_1 = 120 - 5 = 115$ et $A_2 = 115 - 5 = 110$.
   Les émissions du Plan B diminuent de 5 % par an, ce qui correspond à un coefficient multiplicateur de $1 - \dfrac{5}{100} = 0,95$,
   Or $B_0 = 120$,
   Donc $B_1 = 120 \times 0,95 = 114$ et $B_2 = 114 \times 0,95 = 108,3$.

2. a. L'énoncé précise que l'on réduit les émissions d'une valeur constante de 5 kt chaque année,
   donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = A_n - 5$.
   Donc (A_n) est une suite arithmétique de raison $r = -5$ et de premier terme $A_0 = 120$.
   b. (A_n) est une suite arithmétique de raison $r = -5$ et de premier terme $A_0 = 120$,
   donc d'après le cours, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$A_n = A_0 + n \times r = 120 - 5n$$
   c. (A_n) est une suite arithmétique de raison $r = -5$,
   or $r < 0$,
   donc la suite (A_n) est strictement décroissante.

3. a. L'énoncé précise que l'on réduit les émissions de 5 % chaque année, ce qui correspond à multiplier par $0,95$,
   donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = B_n \times 0,95$.
   Donc (B_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $B_0 = 120$.
   b. (B_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $B_0 = 120$,
   donc d'après le cours, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$B_n = B_0 \times q^n = 120 \times 0,95^n$$
   c. (B_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$ avec $0 < q < 1$ et de premier terme $B_0 = 120$ avec $B_0 > 0$,
   donc la suite (B_n) est strictement décroissante.

4. a. Voici le programme complété :

```
def duree_efficacite() :
  A = 120
  B = 120
  n = 0
  while A >= B :
    n = n + 1
    A = A - 5
    B = B * 0.95
  return n
```

b. À l'aide de la calculatrice, on trouve $A_8 = 80$ et $B_8 \approx 79,61$ (soit $A_8 > B_8$), puis $A_9 = 75$ et $B_9 \approx 75,63$ (soit $A_9 \leqslant B_9$).

La fonction renverra donc la valeur 9.

Cela signifie qu'au bout de 9 ans, la tendance s'inverse et le Plan A devient plus efficace (les émissions seront inférieures ou égales à celles du Plan B).

Exercice 4

1. $u_0 = 3$,

   Donc
$$u_1 = \frac{3u_0 + 2}{u_0 + 2} = \frac{3 \times 3 + 2}{3 + 2} = \frac{9 + 2}{5} = \frac{11}{5}$$

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 1} \\
&= \frac{\dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2} - 2}{\dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2} + 1} \\
&= \frac{\dfrac{3u_n + 2 - 2(u_n + 2)}{u_n + 2}}{\dfrac{3u_n + 2 + 1(u_n + 2)}{u_n + 2}} \\
&= \frac{\dfrac{3u_n + 2 - 2u_n - 4}{u_n + 2}}{\dfrac{3u_n + 2 + u_n + 2}{u_n + 2}} \\
&= \frac{u_n - 2}{u_n + 2} \times \frac{u_n + 2}{4u_n + 4} \\
&= \frac{u_n - 2}{4u_n + 4} \\
&= \frac{u_n - 2}{4(u_n + 1)} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 1} \\
v_{n+1} &= \frac{1}{4} v_n
\end{aligned}$$

On reconnait la formule de récurrence d'une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.

De plus, $v_0 = \dfrac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \dfrac{3-2}{3+1} = \dfrac{1}{4}$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{4}$.

b. (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{4}$,
donc d'après le cours, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$,

Or

$$\begin{aligned}
v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1} &\iff v_n(u_n + 1) = u_n - 2 \\
&\iff v_n u_n + v_n = u_n - 2 \\
&\iff v_n u_n - u_n = -2 - v_n \\
&\iff u_n(v_n - 1) = -2 - v_n \\
&\iff u_n = \frac{-2 - v_n}{v_n - 1} \\
&\iff u_n = \frac{2 + v_n}{1 - v_n}
\end{aligned}$$

Donc pour tout entier naturel n, on a bien l'égalité $u_n = \dfrac{2 + v_n}{1 - v_n}$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2 + v_n}{1 - v_n}$,

Or $v_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$,

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}}$$