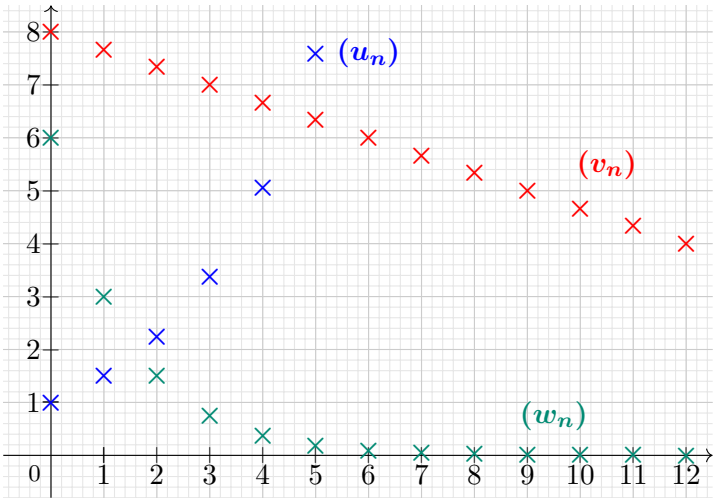
Contrôle Durée : 50 mn

Suites numériques

Calculatrice autorisée.

Exercice 1 ..... 3 points

Sur le graphique suivant, ont été représentées trois suites notées u, v et w.
On sait que ces suites sont soit arithmétiques, soit géométriques.
Pour chacune d'elle, dire si elle est arithmétique ou géométrique et déterminer la raison et le premier terme.



Exercice 2 ..... 5 points

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{n}{n+1}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{n^2+2n}$$
3. Déduire des questions précédentes le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 3 ..... 6 points

Une métropole industrielle émet actuellement 120 kilotonnes (kt) de CO_2 par an (année 0). Pour atteindre ses objectifs environnementaux, la municipalité étudie deux plans de transition distincts pour les années à venir (où n représente le nombre d'années écoulées) :

- **Plan A :** La ville s'engage à réduire ses émissions de 5 kt chaque année. On note A_n le volume d'émissions l'année n.
- **Plan B :** La ville s'engage à réduire ses émissions de 5 % chaque année. On note B_n le volume d'émissions l'année n.

On a ainsi $A_0 = 120$ et $B_0 = 120$.

1. Calculer les émissions A_1 et A_2 pour le Plan A, puis B_1 et B_2 pour le Plan B. Quel est le plan le plus efficace sur les deux premières années ?

2. **Étude du Plan A :**

   a. Justifier la nature de la suite (A_n) en précisant son premier terme et sa raison.

   b. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n en fonction de n.

   c. Étudier le sens de variation de la suite (A_n).

3. **Étude du Plan B :**

   a. Justifier la nature de la suite (B_n) en précisant son premier terme et sa raison.

   b. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n en fonction de n.

   c. Étudier le sens de variation de la suite (B_n).

4. **Comparaison algorithmique des deux plans :**

   Au début, le Plan B est plus efficace que le Plan A. On souhaite déterminer au bout de combien d'années la tendance s'inverse et le Plan A devient plus efficace que le Plan B (c'est-à-dire que $A_n < B_n$).

   a. Recopier et compléter le programme suivant, écrit en langage Python, afin qu'il renvoie le nombre d'années nécessaires pour que le Plan A devienne plus efficace que le Plan B.

```
def duree_efficacite() :
  A = 120
  B = 120
  n = 0
  while ..................:
    n = ......
    A = ..................
    B = ..................
  return ...
```

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur renvoyée par la fonction `duree_efficacite()` et interpréter le résultat.

Exercice 4 ..... 6 points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$$

1. Calculer u_1. On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

2. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -1$. On définit la suite auxiliaire (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$$

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et préciser son premier terme v_0.

   b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

   c. On admet que pout tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 1$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité suivante :

$$u_n = \frac{2 + v_n}{1 - v_n}$$

   d. En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.