Correction **Durée : 50 mn**

Suites numériques

Calculatrice autorisée.

Exercice 1

1. a. $-x^2+7x-10$ est un polynnôme du second degré avec $a=-1$, $b=7$ et $c=-10$.

$$\Delta = b^2-4ac = 7^2-4\times(-1)\times(-10) = 49-40 = 9$$

Donc $\Delta > 0$ et le polynôme a exactement deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7-\sqrt{9}}{2\times(-1)} = \frac{-10}{-2} = 5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7+\sqrt{9}}{2\times(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Or $a<0$

Donc le tableau de signes est

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
Signe de $-x^2+7x-10$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2+7x-10<0$ est $]-\infty\,;2[\cup]5\,;+\infty[$.

b. Pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$w_{n+1}-w_n = -n^2+7n-10$$

Or d'après la question précédente, si $x>5$, alors $-x^2+7x-10<0$

Donc en particulier, pour tout entier naturel $n\geqslant 6$, $-n^2+7n-10<0$

Donc pour tout entier naturel $n\geqslant 6$, $-w_{n+1}-w_n<0$

Donc pour tout entier naturel $n\geqslant 6$, $-w_{n+1}<w_n$

Donc à partir du rang 6, (w_n) est strictement décroissante.

2. (t_n) est géométrique de raison $q=0,4$ et de premier terme $t_0=-3$,
donc (t_n) est géométrique de raison $0<q<1$ et de premier terme $t_0<0$,
donc d'après le cours, (t_n) est strictement croissante.

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$z_n = \frac{3n-5}{2} = \frac{3}{2}n-\frac{5}{2}$$

Donc (z_n) est une suite arithmétique de raison $r=\dfrac{3}{2}$,

Or $\dfrac{3}{2}>0$

De plus d'après le cours, toute suite arithmétique de raison strictement positive, est strictement croissante, donc (z_n) est strictement croissante.

Exercice 2

1. D'après l'énoncé, $u_8 = 142$ car cela correspond au nombre de coffrets vendus le 8 octobre.
   D'après l'énoncé, $u_{22} = 268$ car cela correspond au nombre de coffrets vendus le 22 octobre.

2. La phrase « Grâce à une excellente campagne sur les réseaux sociaux, il vend chaque jour un même nombre r de coffrets supplémentaires par rapport à la veille. »nous informe sur le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$u_{n+1} = u_n + r$$
   On recconait la formule de récurrence d'une suite arithmétique de raison r,
   Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_1 dont on ne connait pas encore la valeur.

3. (u_n) est une suite arithmétique de raison r avec $u_8 = 142$ et $u_{22} = 268$, donc d'après le cours :
   $$u_{22} = u_8 + (22 - 8) \times r$$
   Or
   $$\begin{aligned} u_{22} = u_8 + (22-8) \times r &\iff 268 = 142 + 14r \\ &\iff 126 = 14r \\ &\iff \frac{126}{14} = r \\ &\iff 9 = r \end{aligned}$$
   Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 9$.

4. Le nombre de coffrets vendus le 1er octobre est égal à u_1,
   Or (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 9$ avec $u_8 = 142$,
   Donc
   $$u_1 = u_8 + (1 - 8)r = 142 - 7 \times 9 = 79$$
   Donc le nombre de coffrets vendus le 1er octobre est de 79.

5. (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 9$ et de premier terme $u_1 = 79$,
   donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$u_n = u_1 + (n - 1) \times r = 79 + (n - 1) \times 9 = 79 + 9n - 9 = 70 + 9n$$

6. Le 30 octobre, le nombre de coffrets vendus est de u_{30},
   Or
   $$u_{30} = 70 + 9 \times 30 = 340$$
   Donc 340 coffrets seront vendus le 30 octobre.

7. Nous allons résoudre dans $\mathbb{N}^*$ l'inéquation $u_n \geqslant 335$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\begin{aligned} u_n \geqslant 300 &\iff 70 + 9n \geqslant 300 \\ &\iff 9n \geqslant 230 \\ &\iff n \geqslant \frac{230}{9} \\ &\iff n \geqslant 26 \quad \text{car } \frac{230}{9} \approx 25,5 \text{ et } n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$
   Donc c'est à partir du 26 octobre que les ventes journalière dépasse les 300 coffrets vendus.

Exercice 3

1. Le nombre d'abonnés en février 2024 correspond à a_1,
   Or $a_1 = 0,8 \times a_0 + 2500 = 0,8 \times 10000 + 2500 = 8000 + 2500 = 10500$.
   Donc le nombre d'abonnés prévus en février 2024 est de 10500.
   Le nombre d'abonnés en mars 2024 correspond à a_2,
   Or $a_2 = 0,8 \times a_1 + 2500 = 0,8 \times 10500 + 2500 = 8400 + 2500 = 10900$.
   Donc le nombre d'abonnés prévus en mars 2024 est de 10900.

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - 12500 \\ &= 0,8a_n + 2500 - 12500 \\ &= 0,8a_n - 10000 \\ &= 0,8\left(a_n - \frac{10000}{0,8}\right) \\ &= 0,8(a_n - 12500) \\ v_{n+1} &= 0,8v_n \end{aligned}$$

   On reconnait la formule de récurrence d'une suite géométrique de raison $q = 0,8$.
   De plus, $v_0 = a_0 - 12500 = 10000 - 12500 = -2500$.
   Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = -2500$.

   b. (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = -2500$,
   donc d'après le cours, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n = -2500 \times 0,8^n$$

   c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que $v_n = a_n - 12500$,
   Or

$$\begin{aligned} v_n = a_n - 12500 &\iff a_n = v_n + 12500 \\ &\iff a_n = -2500 \times 0,8^n + 12500 \\ &\iff a_n = 12500 - 2500 \times 0,8^n \end{aligned}$$

   Donc pour tout entier naturel n, on a bien $a_n = 12500 - 2500 \times 0,8^n$.

3. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (12500 - 2500 \times 0,8^{n+1}) - (12500 - 2500 \times 0,8^n) \\ &= -2500 \times 0,8^{n+1} + 2500 \times 0,8^n \\ &= -2500 \times 0,8^n \times 0,8 + 2500 \times 0,8^n \\ &= 2500 \times 0,8^n \times (-0,8 + 1) \\ &= 2500 \times 0,8^n \times 0,2 \\ a_{n+1} - a_n &= 500 \times 0,8^n \end{aligned}$$

   Or $500 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0,8^n > 0$,
   donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n > 0$.
   Donc la suite (a_n) est strictement croissante.

b. Voici les deux programmes Python acceptés :

```
def palier() :
  n = 0
  a = 10000
  while a <= 12000 :
    n = n + 1
    a = 0.8 * a + 2500
  return n
```

```
def palier() :
  n = 0
  a = 10000
  while a <= 12000 :
    n = n + 1
    a = 12500 - 2500 * 0.8 ** n
  return n
```

Exercice 4

1. $u_0 = 2$,
   Donc
$$u_1 = \frac{5u_0}{2u_0 + 5} = \frac{5 \times 2}{2 \times 2 + 5} = \frac{10}{4 + 5} = \frac{10}{9}$$

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{5}{u_{n+1}} \\ &= \frac{5}{\frac{5u_n}{2u_n + 5}} \\ &= 5 \times \frac{2u_n + 5}{5u_n} \\ &= \frac{2u_n + 5}{u_n} \\ &= \frac{2u_n}{u_n} + \frac{5}{u_n} \\ &= 2 + v_n \\ v_{n+1} &= v_n + 2 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{5}{u_{n+1}} - \frac{5}{u_n} \\ &= \frac{5}{\frac{5u_n}{2u_n + 5}} - \frac{5}{u_n} \\ &= 5 \times \frac{2u_n + 5}{5u_n} - \frac{5}{u_n} \\ &= \frac{2u_n + 5}{u_n} - \frac{5}{u_n} \\ &= \frac{2u_n + 5 - 5}{u_n} \\ &= \frac{2u_n}{u_n} \\ v_{n+1} - v_n &= 2 \end{aligned}$$

   Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$.
   De plus, $v_0 = \frac{5}{u_0} = \frac{5}{2} = 2,5$.
   Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = 2,5$.

b. (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = 2,5$,
   donc d'après le cours, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$v_n = v_0 + n \times r = 2,5 + n \times 2 = 2,5 + 2n$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{5}{u_n}$,
   Or
$$\begin{aligned} v_n = \frac{5}{u_n} &\iff u_n = \frac{5}{v_n} \\ &\iff u_n = \frac{5}{2n + 2,5} \end{aligned}$$
   Donc pour tout entier naturel n, on a bien $u_n = \frac{5}{2n + 2,5}$.

3. (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$, or $2 > 0$, donc la suite (v_n) est strictement croissante.
   Or $u_n = \dfrac{5}{v_n}$, et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
   Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.