Contrôle **Durée : 50 mn**

Suites numériques

Calculatrice autorisée.

Exercice 1 — 4 points

Pour chacun des trois cas ci-dessous, le but est de déterminer le sens de variation de la suite concernée.

1. Soit (w_n) une suite numérique telle que pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1} - w_n = -n^2 + 7n - 10$$

   a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$-x^2 + 7x - 10 < 0$$

   b. Que peut-on affirmer quant au sens de variation de la suite (w_n) à partir du rang $n = 6$?

2. (t_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,4$ et de premier terme $t_0 = -3$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \dfrac{3n-5}{2}$.

Exercice 2 — 4,5 points

Un artisan chocolatier lance une nouvelle gamme de coffrets de dégustation.

- Le 1er octobre (jour 1), il vend un certain nombre de coffrets que l'on notera u_1.
- Grâce à une excellente campagne sur les réseaux sociaux, il vend chaque jour un même nombre r de coffrets supplémentaires par rapport à la veille.
- Le 8 octobre (jour 8), il a vendu 142 coffrets sur sa journée.
- Le 22 octobre (jour 22), il a vendu 268 coffrets sur sa journée.

On note u_n le nombre de coffrets vendus le n-ième jour du mois d'octobre.

1. Donner les valeurs respectives de u_8 et u_{22}.
2. Justifier la nature de la suite (u_n).
3. Calculer la raison de la suite (u_n).
4. Combien de coffrets le chocolatier a-t-il vendus le 1er octobre ?
5. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_n en fonction de n.
6. Combien de coffrets vendra-t-il le 30 octobre ?
7. En résolvant une inéquation, déterminer à partir de quelle date, les ventes journalières dépasseront les 335 coffrets.

Exercice 3 ..... 6,5 points

Un créateur de contenu sur une plateforme de vidéos comptabilise 10 000 abonnés le 1er janvier 2024.
Après une étude statistique de son audience, il remarque que chaque mois, 20 % de ses abonnés se désabonnent, mais que le flux de ses nouvelles vidéos lui permet de gagner 2 500 nouveaux abonnés.
On modélise le nombre d'abonnés au mois n par une suite (a_n). Ainsi, $a_0 = 10\,000$ correspond au nombre d'abonnés en janvier 2024.
On admet que pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} = 0,8\,a_n + 2\,500$$

1. Calculer le nombre d'abonnés prévus en février 2024, puis en mars 2024.
2. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 12\,500$.
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
   $$a_n = 12\,500 - 2\,500 \times 0,8^n$$
3. a. Étudier le sens de variation de la suite (a_n).
   b. Le créateur de contenu espère un jour dépasser le palier des 12 000 abonnés. Recopier et compléter le programme suivant, écrit en langage Python, afin que l'exécution de la fonction *palier()* renvoie le nombre de mois nécessaires pour atteindre cet objectif.

```
def palier() :
  n = 0
  a = ......
  while ............:
    n = ......
    a = ..................
  return ...
```

Exercice 4 ..... 5 points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 5}$$

1. Calculer u_1. On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.
2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \neq 0$. On définit la suite (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
   $$v_n = \frac{5}{u_n}$$
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
   $$u_n = \frac{5}{2n + 2,5}$$
3. On rappelle que (v_n) est une suite arithmétique et on admet qu'elle est strictement positive.
   Déterminer le sens de variation de (v_n) et en déduire celui de (u_n).