Feuille d'exercices

Suites numériques - Partie 1/2

Notion de suite

Exercice 1

Pour chacune des suites définies ci-dessous, calculer les 4 premiers termes :

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n - 10$

b. $\begin{cases} v_0 = 1 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 3v_n - 10 \end{cases}$

c. $\begin{cases} w_0 = 5 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = 2w_n + n - 3 \end{cases}$

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = 3 + \dfrac{1}{n}$

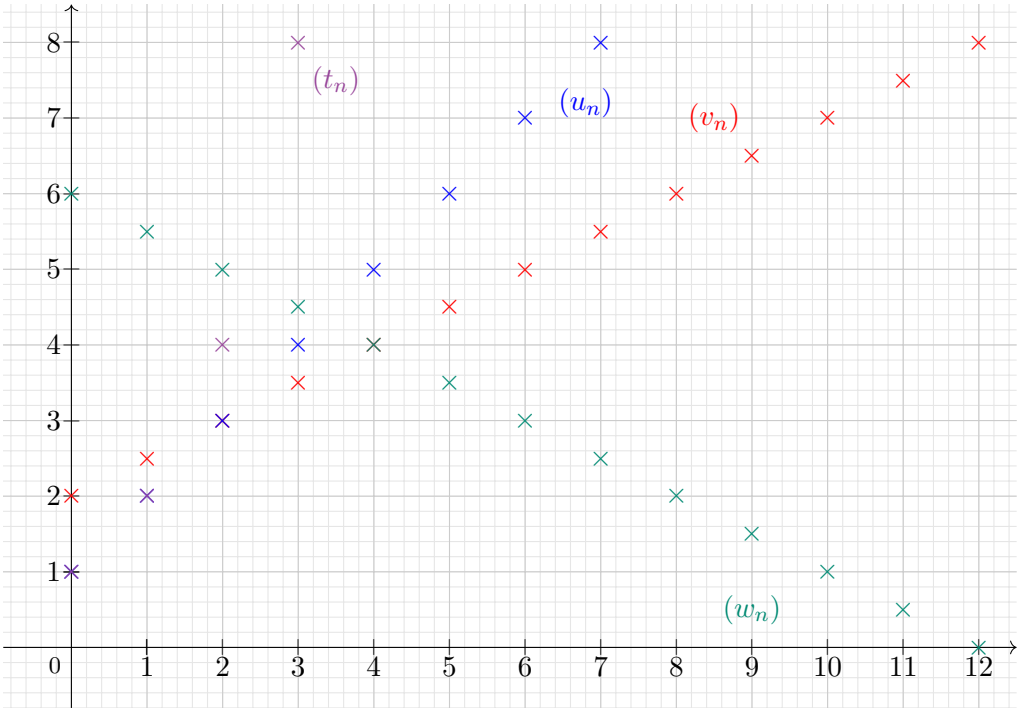
e. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell_n = 3 \times 2^n$

g. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$

Exercice 2

Pour chacune des suites représentées sur le graphique, conjecturer une expression de u_{n+1} en fonction de u_n, puis de u_n en fonction de n (de même pour (v_n), (t_n) et (w_n)).



Exercice 3

On souhaite étudier la suite des bénéfices annuels d'une entreprise depuis l'an 2000.
En l'an 2000, le bénéfice a été de 1 000 000 €. Tous les ans, ce bénéfice augmente de 5% par rapport à l'année précédente.
On note u_n le bénéfice de l'entreprise l'année n. Ainsi, $u_{2000} = 1\,000\,000$.

1. Donner la valeur de $u_{2\,001}$, $u_{2\,002}$ et $u_{2\,003}$.
2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2\,000$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Monotonie d'une suite

Exercice 4

Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = 1 - 2^n$.
2. Pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n - 4$.
3. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n$ et $u_0 = 3$.
4. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + (-1)^n$ et $u_0 = 3$.
5. Pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 + 1$.
6. Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{5^n}{n}$. On pourra penser à la méthode du quotient.

Exercice 5

Extrait Banque E3C

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 puis u_{99}.
2. a. Exprimer, pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ en fonction de n.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$$
   c. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Soit a un nombre réel dans l'intervalle $]1;2]$.
   Recopier et compléter sur la copie le programme Python suivant pour qu'il permette de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leq a$, où a est un nombre de l'intervalle $]1;2]$.

```
n = 0
u = ...
while u ... a :
    n = ...
    u = ...
return ...
```

Exercice 6

Le but de cet exercice est de déterminer le sens de variation de la suite définie à l'exercice précédent avec une autre méthode.
On considère donc la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n^2+4n+4}$
3. Déduire des questions précédentes, le sens de variation de la suite (u_n).

Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 7

Reconnaître, à partir des expressions suivantes, si les suites sont arithmétiques ou géométriques et préciser, lorsque cela est possible, le premier terme u_0 et la raison.
Pour tout entier naturel n :

a. $u_n = 3n + 2$
b. $u_n = 15 - 6n$
c. $u_{n+1} = 9 + u_n$
d. $u_n = 2 \times 5^n$
e. $u_n = 3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
f. $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{4}$
g. $u_n = \dfrac{6}{5^n}$
h. $u_n = 3 \times 2^{n+1}$
i. $u_n = 4^{n-1}$
j. $u_n = \dfrac{3n-5}{2}$
k. $u_n = (n+1)^2 - n^2$
l. $u_n = \dfrac{2^n}{6^{n+1}}$

Exercice 8

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 1,8 et de premier terme $u_0 = 4$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout entier naturel n.
3. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
4. Calculer u_{100} et u_{132}.
5. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 9

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison -4 et de premier terme $u_1 = 30$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout entier naturel n non nul.
3. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n non nul.
4. Calculer u_{54} et u_{72}.

5. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 10

Dans chaque cas, (u_n) est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.

1. Sachant que $u_{15} = 136$ et $u_{38} = 320$, déterminer u_0 et r.
2. Sachant que $u_{18} = -3$ et $u_{25} = -\dfrac{37}{3}$, déterminer u_5 et r.

Exercice 11

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_1 = 0{,}001$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout entier naturel n non nul.
3. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n non nul.
4. Calculer u_{12} et u_{15}.
5. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 12

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.

1. Sachant que $u_0 = -1$ et $q = -\dfrac{4}{3}$, calculer u_{18}.
2. Sachant que $u_{25} = 1$ et $u_{31} = 729$, calculer les valeurs possibles de q.

Exercice 13

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}_+$ et de premier terme $u_2 \in \mathbb{R}$ telle que :

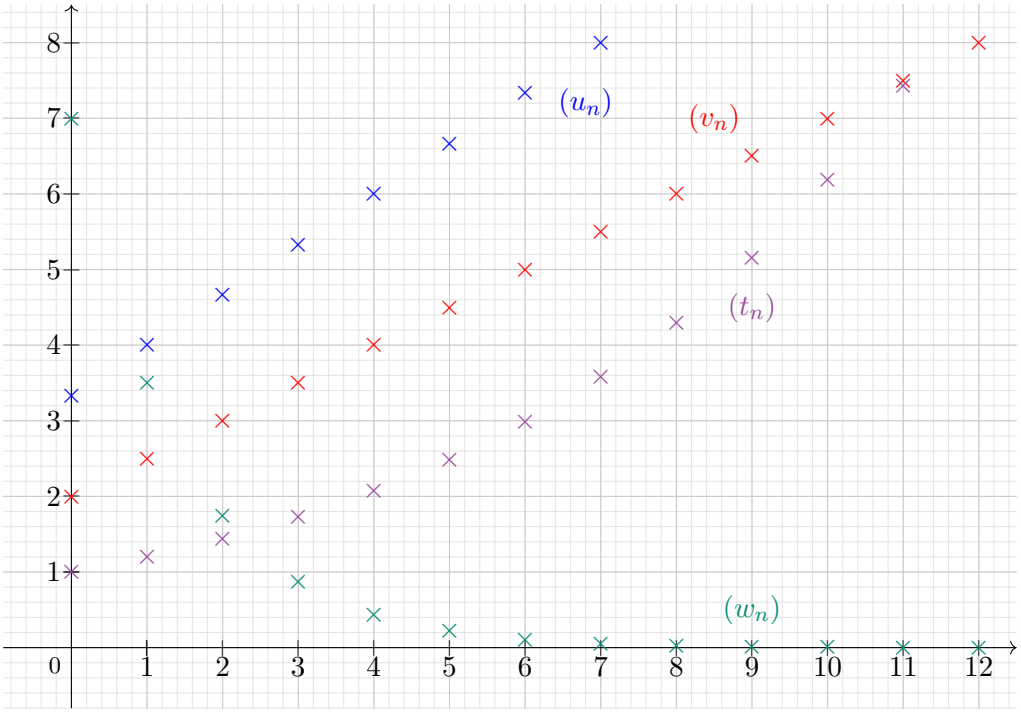
$$u_5 = \frac{1}{128} \qquad \text{et} \qquad u_9 = \frac{1}{2\,048}$$

Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.

1. a. Déterminer la raison q de la suite (u_n).
   b. Déterminer le premier terme u_2.
2. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$.
3. Calculer u_{11}.

Exercice 14

Sur le graphique ci-dessous, ont été représentées des suites, dont on sait qu'elles sont arithmétiques ou géométriques.



Pour chacun des nuages de points sur le graphique ci-dessus, dire si la suite est arithmétique ou géométrique. Dans chaque cas, donner la raison ainsi que la valeur du premier terme.

Exercice 15

On considère (u_n) définie pour tout $n \geq 1$, par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = -7u_n + 8u_{n-1}$$

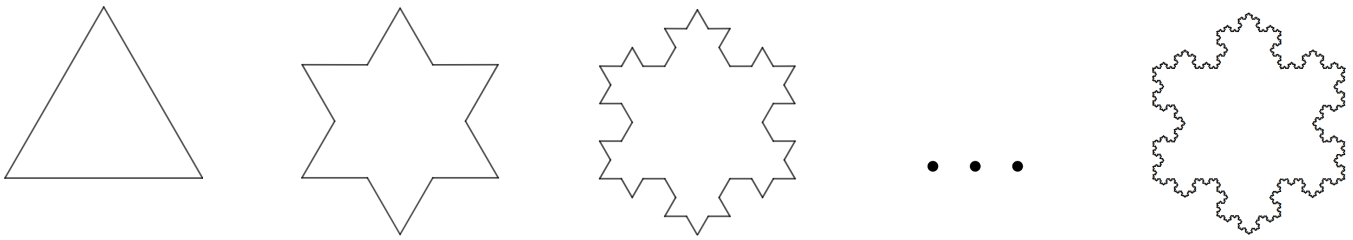
Montrer que la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$s_n = u_{n+1} - u_n$$

est une suite géométrique.

Exercice 16

Le « flocon de Von Koch » est une figure fractale qui peut être construite de manière récursive de la manière suivante :



Étape 0 ($n = 0$) Étape 1 ($n = 1$) Étape 2 ($n = 2$) Étape 5 ($n = 5$)

On part d'un triangle équilatéral de côté 1 à l'étape 0, puis, à chaque étape, chaque côté est divisé en trois afin de donner naissance à un nouveau triangle équilatéral dont le côté est le tiers du côté de l'étape précédente.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- c_n le nombre de côtés de la figure à l'étape n ;
- l_n la longueur d'un côté de la figure à l'étape n ;
- p_n le périmètre de la figure à l'étape n.

Ainsi, $c_0 = 3$, $l_0 = 1$ et $p_0 = 3$.

1. Donner c_1, l_1, p_1 et c_2, l_2, p_2.
2. a. Donner la nature des suites (c_n) et (l_n) en précisant la raison et le premier terme.
   b. En déduire une expression de c_n et l_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Exprimer p_n en fonction de c_n et l_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire une expression de p_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculer le périmètre de la figure à l'étape 10, puis à l'étape 50.

Exercice 17

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$$

1. On pose pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.
   Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
2. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 18

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3u_n + 1}$.
On admet que, pour tout entier naturel n, $u_n \neq 0$.
Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.
2. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

Sujets type baccalauréat

Exercice 19

Extrait Bac ES/L Asie juin 2019

Tous les ans, au mois de septembre, Richard prélève $8,5$ tonnes d'algues sur les plages de sa commune.
Au 1er septembre 2018, il y avait 230 tonnes d'algues sur ces plages.
Tous les ans, entre le 1er octobre et le 1er septembre suivant, la quantité d'algues sur ces plages augmente de $4\,\%$.
On note u_n la quantité en tonnes d'algues présente sur les plages au 1er septembre de l'année $2018 + n$.
Ainsi, $u_0 = 230$.

1. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,04\,u_n - 8,84$.
   Vérifier par le calcul que Richard disposera de $230,36$ tonnes sur les plages au 1er septembre 2019.

2. Soit (v_n) la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 221$.
   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $1,04$.
   Préciser son premier terme.
   b. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n.
   c. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 221 + 9 \times 1,04^n$.
3. a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   b. La quantité d'algues présentes sur ces plages dépassera-t-elle un jour 250 tonnes ? Si oui, préciser au bout de combien d'années cette quantité sera atteinte.
4. Rédiger un programme en langage Python permettant de résoudre la question 3.b.

Exercice 20 ..... Extrait Bac ES/L Métropole - La Réunion septembre 2020

En France, la pratique de l'escalade est en plein essor ces dernières années, notamment grâce aux nombreuses ouvertures de salles dans les villes. La Fédération Française de la Montagne et de l'Escalade (FFME) comptait 90 000 adhérents au début de l'année 2017.
On estime qu'au début de chaque année :

- 21 % des adhérents ne renouvellent pas leur adhésion ;
- 29 400 nouveaux pratiquants s'inscrivent.

À partir de ces données, on modélise le nombre d'adhérents n années après le début de l'année 2017 par une suite (u_n).
Ainsi $u_0 = 90\,000$.

1. Calculer le nombre d'adhérents au début de l'année 2018 puis au début de l'année 2019.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,79u_n + 29\,400$.
3. On souhaite déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 135\,000$.
   On considère l'algorithme suivant :

```
n = 0
u = 90000
while ... :
    n = n + 1
    u = ...
```

   a. Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il permette de répondre à la question posée.
   b. Quelle est la valeur de n après l'exécution de l'algorithme ?
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$v_n = u_n - 140\,000.$$
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
   b. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = -50\,000 \times 0,79^n + 140\,000$$

Exercice 21 ..... Extrait Bac ES/L Antilles-Guyane septembre 2020

On s'intéresse à la gestion des déchets ménagers au sein d'une grande agglomération.
Grâce au développement du recyclage, les experts estiment que la quantité de déchets de l'agglomération à incinérer devrait diminuer de 5 % par an. Par ailleurs, suite à la signature d'un contrat, cette agglomération s'engage à partir du 1er janvier 2020 à collecter et incinérer 12 000 tonnes de déchets supplémentaires par an provenant d'une commune voisine.
Durant l'année 2019, l'agglomération a incinéré 300 000 tonnes de déchets.
On admet que la situation peut être modélisée par une suite (u_n) dont le terme général u_n donne, pour tout entier naturel n, une estimation de la quantité (exprimée en millier de tonnes) de déchets incinérés durant l'année $2019 + n$. On a ainsi $u_0 = 300$.

Partie A

1. a. Déterminer u_1.
   b. Justifier, pour tout entier naturel n, que $u_{n+1} = 0,95\,u_n + 12$.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 240$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,95$ dont on précisera le premier terme v_0.
   b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   c. En déduire, pour tout entier naturel n, que $u_n = 60 \times 0,95^n + 240$.

Partie B

L'agglomération s'est fixé l'objectif d'une diminution de la quantité de déchets incinérés de 15 % d'ici 2039 par rapport à 2019.

1. Justifier que cet objectif ne sera pas atteint si la diminution des déchets suit les prévisions des experts.
2. a. Dans le programme ci-dessous n est un nombre entier et u un nombre réel.
   Recopier et compléter le programme afin que la variable n contienne, à la fin de l'exécution de l'algorithme, l'année à partir de laquelle la quantité de déchets incinérés aura diminué de 15 % par rapport à 2019.

```
n = 2019
u = 300
while u ... :
    n = n + 1
    u = ...
```

   b. En quelle année l'objectif sera-t-il atteint ?