Feuille d'exercices

Probabilités conditionnelles et indépendance

Construire un arbre pondéré ou un tableau en lien avec une situation donnée

Exercice 1

Dans un lycée de 870 élèves :

- $\frac{2}{3}$ des élèves sont des garçons et $\frac{1}{3}$ des élèves sont des filles ;
- la proportion d'élèves du lycée qui pratiquent le tennis est de $0,4$;
- parmi les garçons 170 pratiquent le tennis.

Construire un tableau d'effectifs décrivant la situation.

Exercice 2

Une association organise des colonies de vacances pour des enfants jusqu'à 18 ans. Elle propose des colonies pour trois tranches d'âges :

- les enfants de moins de 10 ans ;
- les enfants qui ont entre 11 ans et 14 ans ;
- les enfants qui ont entre 15 et 18 ans.

Chaque colonie a un thème parmi les trois suivants : le sport, les arts et le voyage.

Pour cette année, nous avons les informations suivantes :

- 300 enfants se sont inscrits ;
- les $\frac{2}{3}$ des inscrits ont moins de 10 ans et $\frac{1}{6}$ des inscrits ont entre 15 ans et 18 ans ;
- en sport, il y a 140 enfants de moins de 10 ans inscrits et 20 enfants qui ont entre 15 ans et 18 ans, le reste a entre 11 ans et 14 ans ;
- parmi les enfants inscrits qui ont entre 11 et 14 ans, 10 ont choisi l'art, et 12 ont choisi le voyage ;
- $\frac{1}{4}$ des enfants inscrits ont choisi le thème du voyage. Enfin, il y a exactement 10 enfants qui ont entre 15 ans et 18 ans, et qui sont inscrits pour le thème voyage.

Construire un tableau d'effectifs décrivant la situation.

Exercice 3

Une ville possède un parc de vélos de location.
La proportion de vélos électriques dans le parc est de 35%. 72% des vélos électriques sont en bon état, les autres sont endommagés. Parmi les vélos non électriques, 38% sont endommagés, les autres sont en bon état.

1. Construire un tableau de fréquences décrivant la situation. On pourra noter E pour « vélo »électrique, et B pour « vélo en bon état ».
2. Construire un arbre pondéré décrivant la situation. On pourra utiliser les mêmes notations.

Utiliser un arbre ou un tableau pour calculer une probabilité

Exercice 4

Une entreprise emploie des cadres et des ouvriers. Parmi eux, il y a des hommes, et des femmes.
Le tableau suivant représente les effectifs de l'entreprise :

	Cadres	Ouvriers	Total
Hommes	25	130	155
Femmes	30	60	90
Total	55	190	245

On choisit au hasard un employé de l'entreprise.
On note H l'évènement « l'employé choisi est un homme », et C l'évènement « l'employé choisi est un cadre ».
Nous n'utiliserons pas d'autres lettres que H et C pour noter les évènements, sauf lorsque l'énoncé l'autorise.

1. Déterminer la probabilité de l'évènement H.
2. a. Exprimer à l'aide d'une phrase l'événement $H \cap C$.
   b. Déterminer la probabilité de l'évènement $H \cap C$.
3. Exprimer à l'aide dune phrase l'évènement $\overline{C}$, et déterminer sa probabilité.
4. Déterminer la probabilité de l'évènement « l'employé choisi est une femme cadre ».
5. Déterminer la probabilité de l'évènement « l'employé choisi est une femme ou un cadre ».
6. Un employé a été choisi au hasard, c'est un cadre. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
   On notera cette probabilité $P_C\left(\overline{H}\right)$.
7. Sachant qu'une employée femme a été choisie, quelle est la probabilité qu'elle fasse partie des cadres ?
   On notera cette probabilité $P_{\overline{H}}(C)$.
8. À quelle probabilité correspond le résultat du calcul $\dfrac{130}{155}$?

Exercice 5 ..... Adaptation du sujet ES Amérique du Nord mai 2018

Le site internet « ledislight.com » spécialisé dans la vente de matériel lumineux vend deux sortes de rubans LED flexibles : un premier modèle dit d'« intérieur »et un deuxième modèle dit d'« extérieur ».
Le site internet dispose d'un grand stock de ces rubans LED.

- 20% des rubans LED proposés à la vente sont d'extérieur ;
- 5% des rubans LED d'extérieur sont défectueux ;
- 8% des rubans LED d'intérieur sont défectueux.

On prélève au hasard un ruban LED dans le stock.
On note :

- E l'évènement : « le ruban LED est d'extérieur » ;
- D l'évènement : « le ruban LED est défectueux ».

1. Donner la probabilité de l'événement $\overline{E}$.
2. Traduire la situation de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Déterminer la probabilité que le ruban LED soit d'extérieur et défectueux.
4. Traduire en langage courant, l'évènement $E \cap \overline{D}$. Calculer sa probabilité.
5. Calculer la probabilité de l'évènement « le ruban LED est d'intérieur, et fonctionne correctement ».

Exercice 6 ..... Adaptation du sujet ES Pondichéry mai 2018

Un commerçant dispose dans sa boutique d'un terminal qui permet à ses clients, s'ils souhaitent régler leurs achats par carte bancaire, d'utiliser celle-ci en mode sans contact (quand le montant de la transaction est inférieur ou égal à 30 €) ou bien en mode secret (quel que soit le montant de la transaction).
Il remarque que :

- 80% de ses clients règlent des sommes inférieures ou égales à 30 €. Parmi eux :
  - 40% paient en espèces ;
  - 40% paient avec une carte bancaire en mode sans contact ;
  - Les autres paient avec une carte bancaire en mode secret.
- 20% de ses clients règlent des sommes strictement supérieures à 30 €. Parmi eux :
  - 70% paient avec une carte bancaire en mode code secret ;
  - Les autres paient en espèce.

On interroge au hasard un client qui vient de régler un achat dans la boutique.

- V : « pour son achat, le client a réglé un montant inférieur ou égal à 30 € » ;
- E : « pour son achat, le client a réglé en espèces » ;
- C : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en mode code secret » ;
- S : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en mode sans contact ».

1. Donner la probabilité de l'évènement V, ainsi que celle de lévènement $\overline{V}$.

2. Traduire la situation de l'énoncé à l'aide dun arbre pondéré.
3. Traduire en langage courant, l'évènement $V \cap C$. Calculer sa probabilité.
4. Calculer la probabilité que pour son achat, le client ait réglé un montant supérieur à 30 € et qu'il ait réglé en espèce.
5. Calculer la probabilité de l'évènement : « pour son achat, le client a réglé un montant inférieur ou égal à 30 € et a réglé avec sa carte bancaire en mode sans contact ».

Calculer des probabilités à l'aide de la formule des probabilités totales

Exercice 7

Recopier l'arbre pondéré de lexercice 5, et relire l'énoncé.
Déterminer la probabilité de l'évènement D.

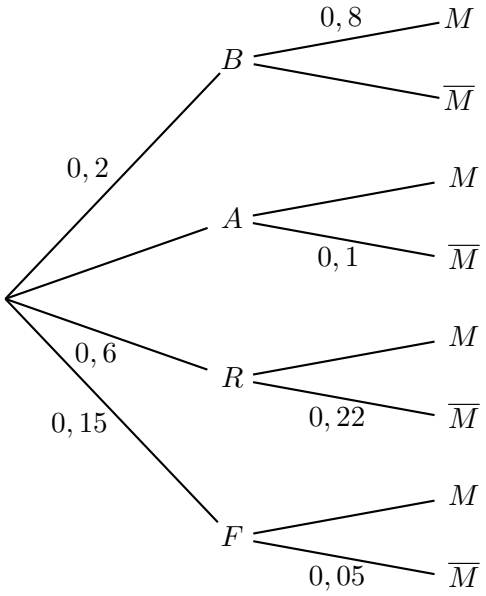
Exercice 8

Recopier l'arbre pondéré de l'exercice 6, et relire l'énoncé.

1. Déterminer la probabilité de l'évènement E.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement C.
3. Déterminer la probabilité de l'évènement S.

Exercice 9

Un concessionnaire de voiture vend des voitures des marques B, A, R, F.
Les modèles sont proposés avec une peinture métallisée ou non. On choisit un client au hasard.
La situation a été représentée à l'aide de l'arbre pondéré ci-contre.



1. Calculer la probabilité $P(A)$.
2. Recopier et compléter toutes les probabilités de l'arbre.
3. Calculer la probabilité pour que le client achète un modèle métallisé.
4. Calculer la probabilité pour que le client achète un modèle non métallisé.

Exercice 10 ..... Adaptation sujet Spé Term Polynésie 2021

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays.
Selon les autorités sanitaires du pays, 7% des habitants sont infectés par cette maladie. Parmi les individus infectés, 20% sont déclarés négatifs. La probabilité qu'un test soit positif est 0,065 3.

On note les évènements suivants :

- M : « la personne est infectée par la maladie » ;
- T : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée. On pourra le compléter plus tard.
2. Calculer $P\left(\overline{M} \cap T\right)$.

Calculer des probabilités conditionnelles

Exercice 11 ..... Adaptation du sujet ES Polynésie juin 2018

Une entreprise est composée de 3 services A, B, et C d'effectifs respectifs 450, 230 et 320 employés.
Une enquête effectuée sur le temps de parcours quotidien entre le domicile des employés et l'entreprise a montré que :

- 40% des employés du service A résident à moins de 30 minutes de l'entreprise ;
- 20% des employés du service B résident à moins de 30 minutes de l'entreprise ;
- 80% des employés du service C résident à moins de 30 minutes de l'entreprise.

On choisit au hasard un employé de cette entreprise et on considère les évènements suivants :

- A : « l'employé fait partie du service A » ;
- B : « l'employé fait partie du service B » ;
- C : « l'employé fait partie du service C » ;
- T : « l'employé réside à moins de 30 minutes de l'entreprise ».

1. a. Justifier que $P(A) = 0,45$.
   b. Donner $P_A(T)$.
   c. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de l'évènement T. En déduire la probabilité de l'évènement $\overline{T}$.
3. Sachant qu'un employé de l'entreprise réside à plus de 30 minutes de son lieu de travail, déterminer la probabilité qu'il fasse partie du service C.
4. Dans cette question, l'employé choisi réside à plus de 30 minutes de son lieu de travail. Déterminer la probabilité qu'il fasse partie du service B.
5. Sachant que l'employé réside à plus de 30 minutes de son lieu de travail, déterminer la probabilité qu'il fasse partie du service A.

Exercice 12 ..... Adaptation du sujet ES Métropole/La Réunion septembre 2019

Pour mieux cerner le profil de ses clients, une banque réalise un sondage qui permet d'établir que :

- 53% de ses clients ont plus de 50 ans ;
- 32% de ses clients sont intéressés par des placements dits risqués ;
- 25% de ses clients de plus de 50 ans sont intéressés par des placements dits risqués.

On choisit au hasard un client de cette banque et on considère les évènements suivants :

- A : « Le client a plus de 50 ans » ;
- R : « Le client est intéressé par des placements risqués ».

1. Donner $P(R)$ et $P_A(R)$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré. Cet arbre pourra être complété par la suite.
3. Montrer que la probabilité que le client ait plus de 50 ans et soit intéressé par des placements dits risqués est 0,132 5.
4. Sachant que le client choisi est intéressé par des placements dits risqués, quelle est la probabilité qu'il ait plus de 50 ans.
5. Sachant que le client choisi est intéressé par des placements dits risqués, déterminer la probabilité qu'il ait moins de 50 ans.
6. a. Calculer la probabilité que le client choisi ait moins de 50 ans et soit intéressé par les placements risqués.
   b. Compléter l'arbre pondéré de la question 2.

Exercice 13 ..... Adaptation du sujet ES Asie juin 2019

Un club de football est composé d'équipes adultes masculines, adultes féminines et d'équipes d'enfants.
Chaque week-end, la présidente Claire assiste au match d'une seule équipe du club et elle suit :

- dans 10% des cas, le match d'une équipe adulte féminine ;
- dans 40% des cas, le match d'une équipe adulte masculine ;
- dans les autres cas, le match d'une équipe d'enfants.

Lorsqu'elle assiste au match d'une équipe masculine, la probabilité que celle-ci gagne est $0,6$. Lorsqu'elle assiste au match dune équipe d'enfants, la probabilité que celle-ci gagne est $0,54$.
La probabilité que Claire voie l'équipe de son club gagner est $0,58$.

On choisit un week-end au hasard. On note les évènements suivants :

- F : « Claire assiste au match d'une équipe adulte féminine » ;
- M : « Claire assiste au match d'une équipe adulte masculine » ;
- E : « Claire assiste au match d'une équipe denfants » ;
- G : « L'équipe du club de Claire gagne le match ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a. Déterminer la probabilité que Claire voie un match de l'équipe adulte féminine et que l'équipe gagne.

b. Sachant que Claire a vu un match de l'équipe féminine, quelle est la probabilité pour que le match soit gagné ?

3. Claire annonce avoir assisté à la victoire d'une équipe du club. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi le match d'une équipe adulte féminine ?

4. Claire annonce avoir assisté à la victoire d'une équipe du club. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi le match d'une équipe d'enfants ?

5. Claire annonce avoir assisté à la défaite d'une équipe du club. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi le match d'une équipe adulte masculine ?

Exercice 14 ..... Adaptation sujet Spé Term Métropole juin 2021

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 5% des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.
Un ingénieur a mis au point un test à appliquer aux pièces. Ce test a deux résultats possibles : « positif » ou bien « négatif ».
On applique ce test à une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne.

On considère les évènements suivants :

- D : « la pièce est défectueuse » ;
- T : « la pièce présente un test positif ».

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- La probabilité qu'une pièce présente un test positif sachant qu'elle est défectueuse est égale à $0,98$;
- la probabilité qu'une pièce présente un test négatif sachant qu'elle n'est pas défectueuse est égale à $0,97$.

1. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité pour que la pièce choisie au hasard présente un test positif.

3. On appelle **valeur prédictive positive** du test, la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant que le test est positif. On considère que pour être efficace, un test doit avoir une valeur prédictive positive supérieure à $0,9$.
Calculer la valeur prédictive positive de ce test et préciser s'il est efficace.

Indépendance de deux événements

Exercice 15

On dispose d'un jeu de 52 cartes classique. On tire au hasard une carte.

On note les événements :

- K : « la carte choisie est un roi » ;
- Q : « la carte choisie est une dame » ;
- T : « la carte choisie est un trèfle ».

1. a. Déterminer la probabilité des événements K, T et $K \cap T$.
   b. Les événements K et T sont-ils indépendants ?
   c. Les événements $\overline{K}$ et T sont-ils indépendants ?
   d. Les événements $\overline{K}$ et $\overline{T}$ sont-ils indépendants ?
2. Les événements K et Q sont-ils indépendants ?

Exercice 16

On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.

On note les évènements :

- I : « le chiffre indiqué par le dé est impair » ;
- G : « Le chiffre indiqué par le dé est supérieur ou égal à 4 ».

1. Les événements I et G sont-ils indépendants ?
2. Les événements $\overline{I}$ et G sont-ils indépendants ?

Exercice 17

Une entreprise a relevé les différents statuts de ses employés. Les effectifs sont indiqués dans le tableau suivant. On choisit un employé au hasard dans l'entreprise.

On note les évènements :

- C : « L'employé choisi est un cadre » ;
- O : « L'employé choisi est un ouvrier » ;
- T : « L'employé choisi est un technicien » ;
- H : « L'employé choisi est un homme ».

	Cadres	Ouvriers	Techniciens	Total
Hommes	48	130	22	200
Femmes	30	60	35	125
Total	78	190	57	325

1. Les événements O et H sont-ils indépendants ?

2. Les événements C et H sont-ils indépendants ? Que peut-on dire de C et $\overline{H}$?

Exercice 18

Une salle d'attente d'un cabinet médical contient 5 patients. Parmi ces patients, il y a deux hommes et trois femmes.
Le médecin reçoit les patients dans l'ordre d'arrivée. Il ne connait pas cet ordre.

On note les évènements :

- H_1 : « Le premier patient reçu est un homme » ;
- H_2 : « Le deuxième patient reçu est un homme ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que les deux premiers patients reçus soient des femmes ?
3. Les évènements H_1 et H_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 19

Un jeu consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces.
Si le dé indique 5, ou 6, alors la partie est gagnée. Sinon, la partie est perdue.
Un joueur décide de jouer deux parties de suite.

On note les évènements :

- G_1 : « La première partie est gagnée » ;
- G_2 : « La deuxième partie est gagnée ».

1. Pourquoi peut-on considérer que les événements G_1 et G_2 sont indépendants ?
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre.
3. Déterminer la probabilité de gagner exactement une partie parmi les deux.
4. Déterminer la probabilité de gagner au moins une partie parmi les deux.

Exercice 20

On lance un dé équilibré à 6 faces (numérotées de 1 à 6) deux fois de suite.

On note les évènements suivants :

- A : « La somme des dés est paire » ;
- B : « Le premier numéro obtenu est 6 » ;
- C : « Le numéro obtenu au premier lancer, est strictement supérieur à celui obtenu au deuxième ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un tableau à double entrées.
2. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
3. Les évènements A et C sont-ils indépendants ?
4. Les évènements B et C sont-ils indépendants ?

Exercice 21

En France métropolitaine (en 2019), 77% des français possèdent un smartphone.
On choisit successivement, et au hasard, trois français en France métropolitaine.
La population française en France métropolitaine est suffisamment grande pour considérer que ces tirages peuvent être assimilés à des tirages successifs avec remises.

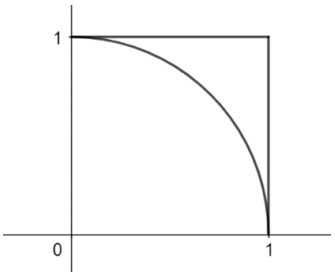
On note les évènements suivants :

- S_1 : « Le premier français choisi possède un smartphone » ;
- S_2 :« Le deuxième français choisi possède un smartphone » ;
- S_3 :« Le troisième français choisi possède un smartphone ».

1. Pourquoi les évènements S_1, S_2 et S_3 peuvent-ils être considérés comme indépendants ?
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Déterminer la probabilité que sur les trois personnes choisies, au moins deux aient un smartphone.
4. Déterminer la probabilité que sur les trois personnes choisies, au plus deux aient un smartphone.
5. Déterminer la probabilité que sur les trois personnes choisies, exactement deux aient un smartphone.
6. Déterminer la probabilité que les trois personnes choisies aient un smartphone.

Exercice 22 – Méthode de Monte Carlo pour estimer le nombre π

Dans un repère orthonormé, on considère la figure ci-contre constituée du carré de côté 1 et du quart de cercle de centre l'origine du repère.



1. Déterminer l'aire du carré sur la figure ci-contre.
2. Déterminer l'aire du quart de disque sur la figure ci-contre.
3. Soit $A(x;y)$ un point du plan avec x et y deux réels compris entre 0 et 1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour que A appartienne au quart de cercle représenté ci-contre.
4. Expliquer en quoi le programme Python ci-dessous permet de fournir une estimation de π.

Programme

```
from random import *
def Monte_Carlo(n) :
    Dedans = 0
    for i in range(n) :
        x = random()
        y = random()
        if x*x + y*y <= 1 :
            Dedans = Dedans + 1
    Approx_pi = Dedans/n*4
    return Approx_pi
```

Probabilités et suites

Exercice 23

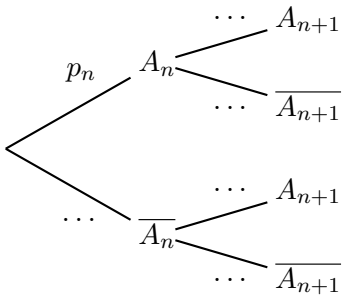
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent ;
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par A_n l'événement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine », et on note p_n la probabilité de l'événement A_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. a. Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
   b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. a. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



   b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.
   c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = p_n - 0,05$$

   est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison q.
   En déduire l'expression de u_n, puis de p_n, en fonction de n et q.

Exercice 24

Adaptation Sujet Bac Asie juin 2008

On considère plusieurs sacs de billes S_1, S_2, ..., S_n, ... tels que :

- le premier, S_1, contient 3 billes jaunes et 2 vertes ;
- chacun des suivants, S_2, S_3, ..., S_n, ... contient 2 billes jaunes et 2 vertes.

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivante :

- on tire au hasard une bille dans S_1 ;
- on place la bille tirée de S_1 dans S_2, puis on tire au hasard une bille dans S_2 ;

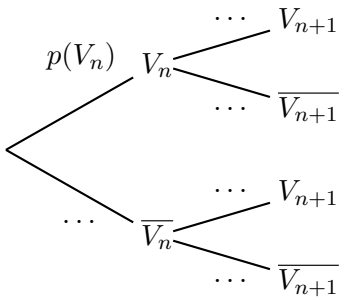
- on place la bille tirée de S_2 dans S_3, puis on tire au hasard une bille dans S_3 ;
- etc.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note V_n l'événement : « la bille tirée dans S_n est verte » et on note $p(V_n)$ sa probabilité.

1. Mise en évidence d'une relation de récurrence

   a. D'après l'énoncé, donner les valeurs de $p(V_1)$, $p_{V_1}(V_2)$, $p_{\overline{V_1}}(V_2)$.
   En déduire la valeur de $p(V_2)$.

   b. Compléter l'arbre pondéré suivant, et exprimer $p(V_{n+1})$ en fonction de $p(V_n)$.



2. **Étude d'une suite**

   On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = \frac{2}{5} \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} \text{ pour tout } n \geqslant 1 \end{cases}$

   On pose (z_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $z_n = u_n - \dfrac{1}{2}$.

   a. Montrer que la suite (z_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

   b. Exprimer z_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   c. En déduire une expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   d. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3. **Évolution des probabilités** $p(V_n)$

   a. À l'aide des résultats précédents, calculer la probabilité de tirer une bille verte dans le sac 8.

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs de n pour lesquelles on a : $0{,}499\,99 \leqslant p(V_n)$?

Exercice 25

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot empereur est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.

On a observé que :

- si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est $0,3$;
- si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est $0,8$.

Lors du premier passage, les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par :

- T_n l'événement : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage ».
- $\overline{T}_n$ l'événement : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage ».

1. Déterminer la probabilité de l'événement T_2.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous posons $p_n = P(T_n)$.
   Montrer que :
   $$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = 0,1 \times p_n + 0,2.$$
   Proposer un script Python qui restitue la liste des 15 premiers termes de la suite (p_n).
3. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
   $$u_n = p_n - \frac{2}{9}.$$
   a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   b. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   c. Exprimer p_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Une technique intéressante

Exercice 26

Le but de cet exercice est d'étudier une méthode pour obtenir une estimation de la proportion d'individus d'une population qui possède un caractère peu avouable en décomplexant les individus.

On souhaite estimer la proportion p d'individus d'une population qui ne prennent qu'une douche par semaine. On souhaite donc poser la question suivante à chaque individu de la population : « Vous lavez-vous une seule fois par semaine ? ».

1. Quel problème allons-nous très certainement rencontrer en faisant cette étude ?

On décide de mettre en place le protocole suivant :

- l'individu interrogé lance un dé équilibré à 6 faces et garde secret son résultat ;
- si le dé indique 5 ou 6, l'individu nous répond la vérité ;
- si le dé indique 1, 2, 3 ou 4, l'individu nous répond le contraire de la vérité.

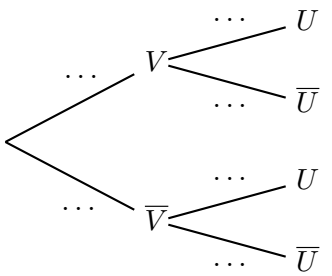
2. Expliquer brièvement pourquoi cette méthode décomplexe les individus interrogés.

On note les événements suivants :

- V : « le dé indique 5 ou 6, l'individu interrogé dit la vérité » ;
- U : « l'individu interrogé répond qu'il se lave une seule fois par semaine ».

On interroge un individu au hasard.

3. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant afin qu'il corresponde à la situation de l'énoncé.



4. Exprimer p en fonction de $P(U)$.

5. Après l'étude, la fréquence d'individus ayant réalisé l'événement U est de 60%.

   En considérant que la population interrogée est très grande, et que par conséquent, il y a une forte probabilité pour que la proportion d'individus ayant réalisé l'événement U est proche de $P(U)$, donner une estimation de la proportion d'individus qui se lavent une seule fois par semaine dans cette population.

6. Le but de cette question est de simuler plusieurs réalisations d'un tel sondage à l'aide d'un programme en langage Python. On considèrera que la propotion p est égale à $0,2$.

   On souhaite observer grâce à notre programme que la fréquence à laquelle est réalisé l'événement U est proche de $P(U)$ théorique c'est à dire $0,6$.

   a. Créer une fonction en langage python nommée *tirage*, qui prend en argument la proportion p et qui renvoie la valeur 1 si l'individu réalise l'événement U et 0 sinon.
   b. Créer une fonction *sondage* prenant en argument un entier naturel n et la proportion p, qui modélise en appelant la fonction *tirage* une réalisation du sondage auprès d'une population de n individus, et qui renvoie la fréquence de réalisation de U.
   c. Effectuer plusieurs réalisation de $sondage(10000, 0.2)$. Vérifier que les résultats sont proches de la valeur théorique de $P(U)$.