Chapitre 4
Dérivation

Capacités attendues

- Calculer un taux de variation, la pente d'une sécante.
- Interpréter le nombre dérivé en contexte : pente dune tangente, vitesse instantanée, cout marginal, etc.
- Déterminer graphiquement un nombre dérivé par la pente de la tangente. Construire la tangente en un point à une courbe représentative connaissant le nombre dérivé.
- Déterminer l'équation de la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction.
- Calculer une valeur approchée de $f(a+h)$.
- Dans des cas simples, calculer une fonction dérivée en utilisant les propriétés des opérations sur les fonctions dérivables.

Plan du cours

1 Notion de limite d'une fonction f lorsque h tend vers 0 : . . . 2
2 Nombre dérivé d'une fonction f en un réel a : . . . 3
2.1 Taux d'accroissement et nombre dérivé : . . . 4
2.2 Équation de la tangente : . . . 6
2.3 Application : Calcul d'une valeur approchée de $f(a+h)$ . . . 7
3 Fonction dérivée : . . . 8
3.1 Définitions : . . . 8
3.2 Fonctions dérivées des fonctions usuelles : . . . 8
4 Opérations sur les fonctions dérivées : . . . 9
4.1 Somme de deux fonctions : . . . 9
4.2 Fonction de la forme $\lambda.u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ . . . 10
4.3 Produit de deux fonctions : . . . 11
4.4 Quotient de deux fonctions : . . . 12
4.5 Tableau récapitulatif : . . . 12
5 Applications de la dérivation : . . . 13
5.1 Étude du sens de variation d'une fonction : . . . 13
5.2 Étude d'extrema pour une fonction : . . . 13



Histoire des mathématiques

Le calcul différentiel s'est imposé par sa capacité à donner des solutions simples à des problèmes nombreux d'origines variées (cinématique, mécanique, géométrie, optimisation).
Le développement d'un calcul des variations chez Leibniz (1646 - 1716) et Newton se fonde sur l'hypothèse que les phénomènes naturels évoluent linéairement quand on leur applique des petites variations. Leurs approches partent de notions intuitives mais floues d'infiniment petit.
Ce n'est que très progressivement que les notions de limites et de différentielles, qui en fondent l'exposé actuel, ont été clarifiées au XIXe siècle. C'est à Lagrange (1736 - 1813 ci-contre) que nous devons la notation $f'(x)$.



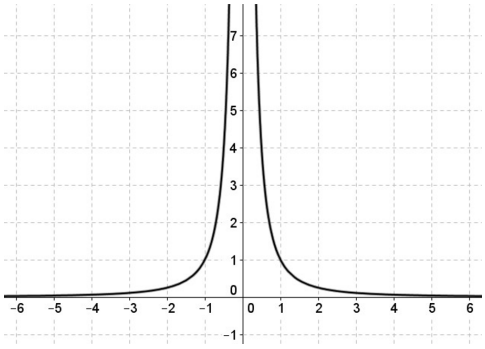
1 Notion de limite d'une fonction f lorsque h tend vers 0 :

Notion de limite d'une fonction f lorsque h tend vers 0 à travers des exemples :
On dit qu'on « cherche la limite d'une fonction f lorsque h tend vers 0 », lorsqu'on étudie le comportement de la fonction f quand la variable h se rapproche de 0 sans jamais être égale à 0.
Plusieurs phénomènes sont possibles :

- Lorsque h tend vers 0, $f(h)$ peut « tendre » vers $+\infty$ ou vers $-\infty$:

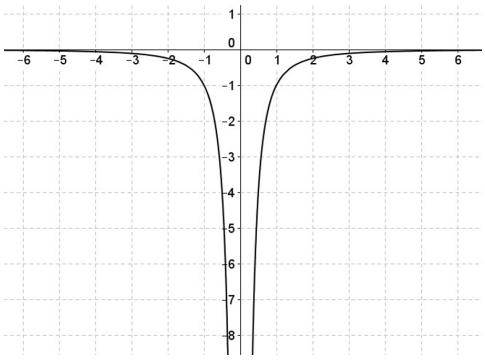
Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, $f(h) = \dfrac{1}{h^2}$

On écrit : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h^2} = +\infty$



Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, $f(h) = -\dfrac{1}{h^2}$

On écrit : $\lim\limits_{h \to 0} -\dfrac{1}{h^2} = -\infty$

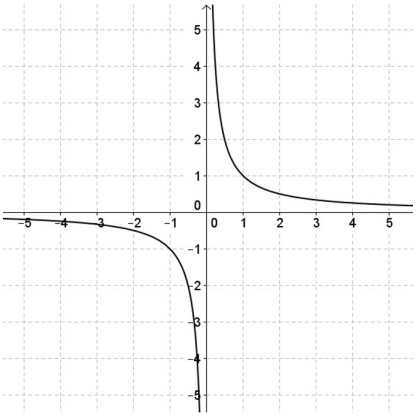


- Lorsque h tend vers 0, $f(h)$ peut « tendre » vers $+\infty$ lorsque h est d'un signe et vers « $-\infty$ » lorsque h est du signe contraire :

Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, $f(h) = -\dfrac{1}{h}$

On écrit : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} -\dfrac{1}{h} = +\infty$

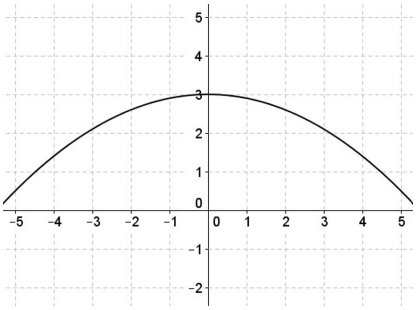
et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} -\dfrac{1}{h} = -\infty$



- Lorsque h tend vers 0, $f(h)$ peut « tendre » vers une réel $\ell \in \mathbb{R}$:

Pour tout $h \in \mathbb{R}$, $f(h) = -0,1h^2 + 3$

On écrit : $\lim\limits_{h\to 0} \left(-0,1h^2 + 3\right) = 3$

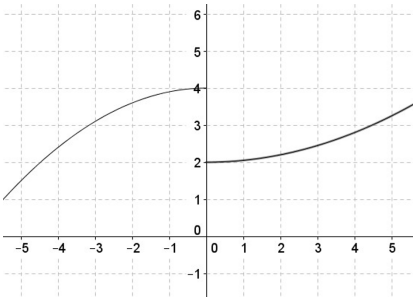


- Lorsque h tend vers 0, $f(h)$ peut « tendre » vers une réel $\ell \in \mathbb{R}$ « d'un côté » et $\ell' \in \mathbb{R}$ « de l'autre » :

Pour tout $h < 0$, $f(h) = -0,1h^2 + 4$ et pour tout $h > 0$, $f(h) = 0,05h^2 + 2$

On écrit : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \left(0,05h^2 + 2\right) = 4$

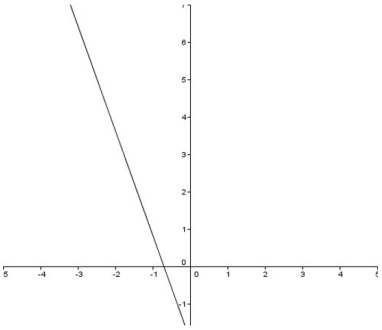
et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \left(-0,1h^2 + 4\right) = 2$

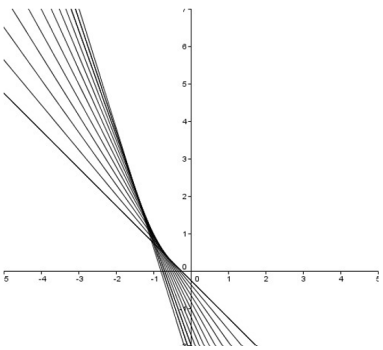


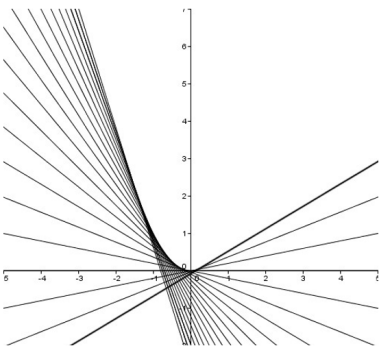
2 Nombre dérivé d'une fonction f en un réel a :

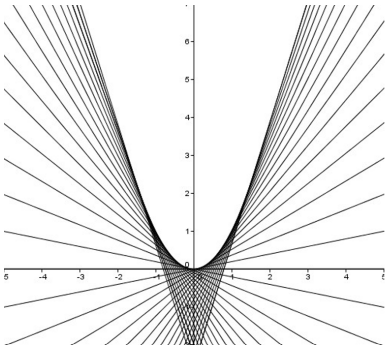
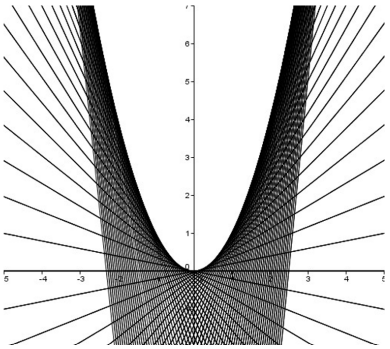
Nous allons voir dans ce paragraphe qu'une courbe peut être approchée par un ensemble de droite qui la décriront parfaitement.
L'idée est de ramener l'étude du sens de variation d'une fonction compliquée, à la simple étude des fonctions affines qui la décrivent.

Pour la courbe représentative de la fonction carré par exemple :



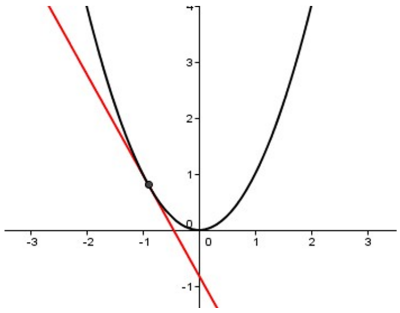
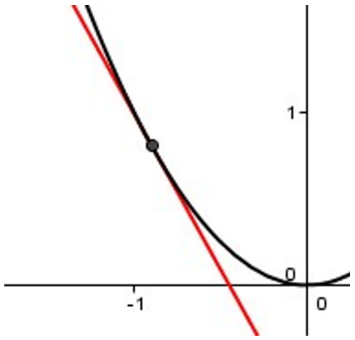




L'ensemble des droites dessinées semble bien décrire la fonction carré.

En réalité chacune de ces droites ne « décrit » la courbe qu'autour d'un seul point !

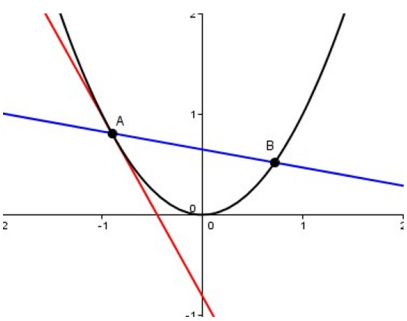
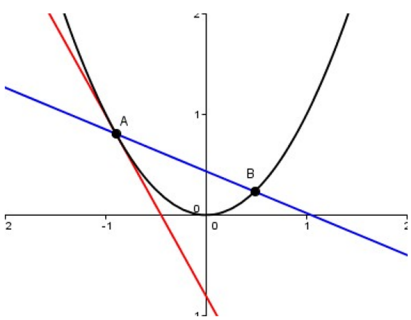
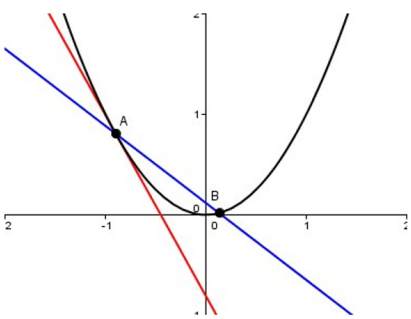
Si on cherche la droite qui « approche » le mieux la courbe autour du point A, c'est la droite représentée en rouge. En effet, si on zoome davantage, la droite rouge et la courbe sembleront confondues autour de A.
La fonction affine dont la représentation est en rouge, sera donc la « meilleure approximation affine » de f en a (abscisse du point A).

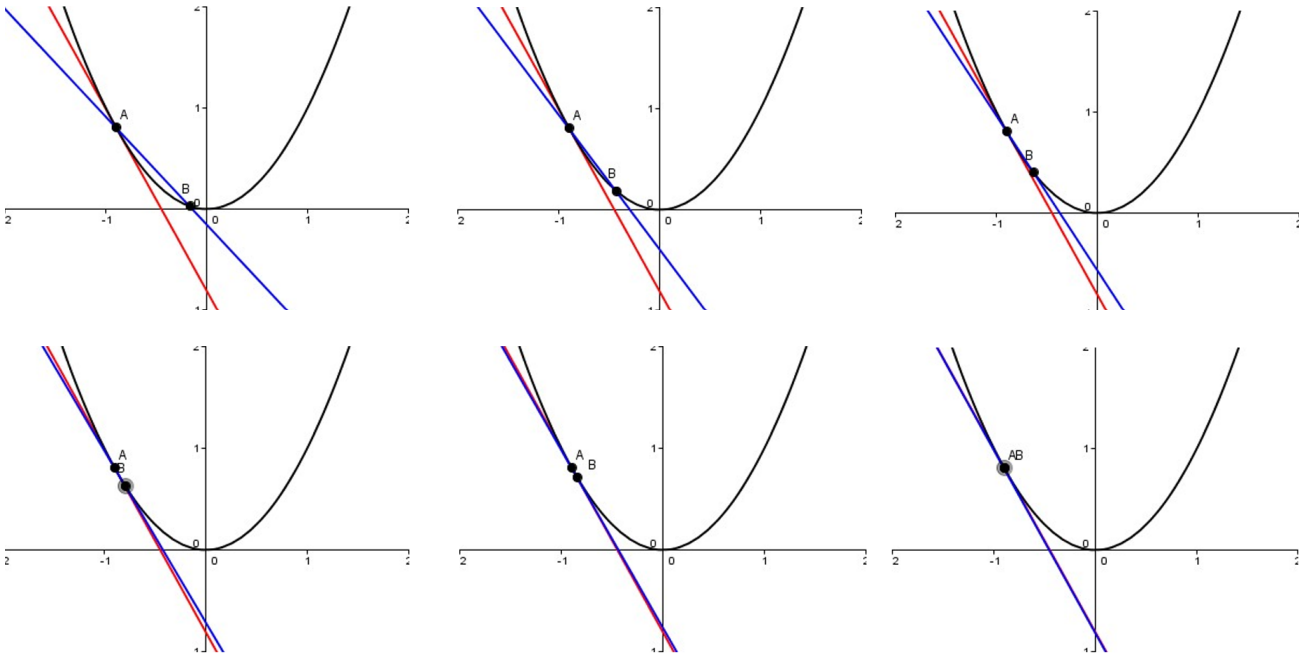
Idée : Comme la droite rouge et la courbe ont le même comportement autour du point A, si j'arrive à connaître l'équation de cette droite rouge, je pourrais savoir si elle représente une fonction affine croissante ou décroissante, et je saurai donc si autour du point A, la fonction f est croissante ou décroissante.
Mais !!! Pour connaître le sens de variation de cette fonction affine, il suffit que je connaisse le signe de son coefficient dominant. Mon but est donc de trouver le coefficient directeur de cette droite !

2.1 Taux d'accroissement et nombre dérivé :

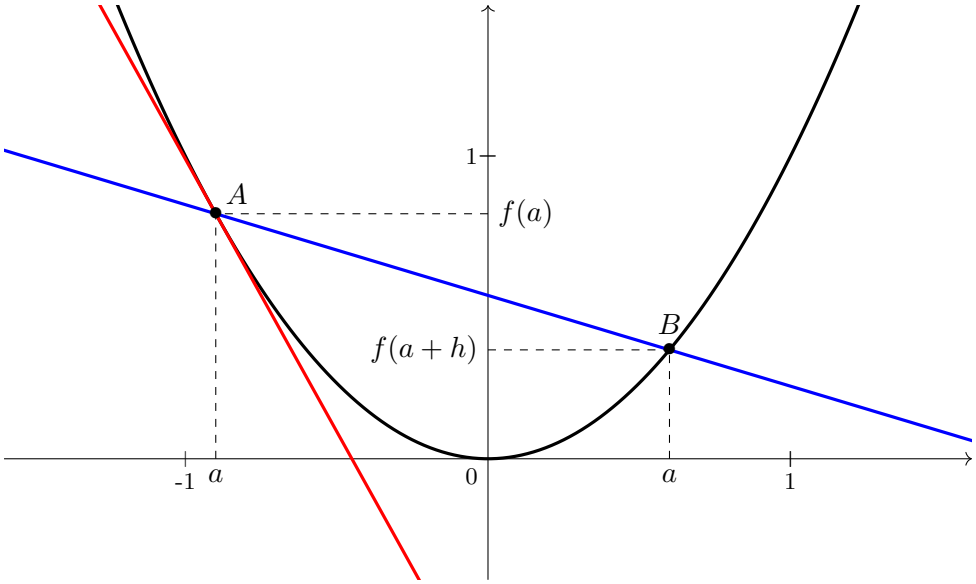
Problème : Nous voulons trouver le coefficient directeur de la droite rouge, que nous appellerons tangente. Mais nous ne connaissons les coordonnées que du point A qui sont $(a; f(a))$.
Or, pour calculer le coefficient directeur d'une droite, nous avons besoin de deux points.
Nous n'allons donc pas pourvoir calculer le coefficient directeur directement.

Solution : Nous allons passer par les sécantes (AB). Les sécantes (AB) se rapprochant de la tangente lorsque B se rapproche de A, nous allons calculer les coefficients directeurs des sécantes et regarder la limite lorsque B se rapproche de A.



Coefficient directeur de la sécante (AB) :
A a pour coordonnées $(a; f(a))$ et B a pour coordonnées $(a+h; f(a+h))$ La droite (AB) a donc pour coefficient directeur : $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$



Définition 1 – Taux d'accroissement

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à images dans $\mathbb{R}$.
Soient $a \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a+h \in I$.
On définit le taux d'accroissement de f en a, comme la fonction $\tau_a : h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Coefficient directeur de la tangente :
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en a est donc, lorsqu'il existe, la limite : $\lim\limits_{h\to 0} \tau_a(h)$ c'est à dire : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Définition 2 – Nombre dérivé de f en a

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à images dans $\mathbb{R}$.
Soient $a \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in I$.
On appelle nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$, lorsqu'elle existe, la limite : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
On dit alors que f est dérivable en a et on écrit :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Méthode 1 – Montrer qu'une fonction est dérivable en un réel a

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est dérivable en $a = 1$.

Soit τ_1 (car $a = 1$) la fonction définie pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ par $\tau_1(h) = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$.
Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
\tau_1(h) &= \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\
&= \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \\
&= \frac{1^2 + 2 \times 1 \times h + h^2 - 1^2}{h} \\
&= \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \\
&= \frac{2h + h^2}{h} \\
&= \frac{h(2+h)}{h} \\
\tau_1(h) &= 2 + h
\end{aligned}$$

Or

$$\lim_{h \to 0} (2 + h) = 2$$

Donc

$$\lim_{h \to 0} \tau_1(h) = 2$$

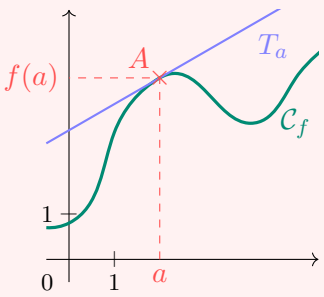
Donc f est dérivable en 1 et le nombre dérivé de f en 1 est $f'(1) = 2$.

2.2 Équation de la tangente :

Théorème 1 – Équation de la tangente

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à images dans $\mathbb{R}$.
Soit $a \in I$ tel que f est dérivable en a.
La tangente T_a à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



Preuve

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à images dans $\mathbb{R}$.
Soit $a \in I$ tel que f est dérivable en a.
Soit T_a la tangente à la courbe représentatie de f au point d'abscisse a.
Par définition du nombre dérivé de f en a, on sait que la droite T_a a pour coefficient directeur $f'(a)$.
Donc T_a admet une équation de la forme $y = f'(a)x + p$ avec $p \in \mathbb{R}$. Or, par définition, le point $A(a; f(a))$ appartient à la tangente T_a, Donc ses coordonnées vérifient l'équation de T_a, Donc

$$\begin{aligned} y_A = f'(a) \times x_A + p \Leftrightarrow\ & f(a) = f'(a) \times a + p \\ \Leftrightarrow\ & f(a) - f'(a) \times a = p \\ \Leftrightarrow\ & p = f(a) - f'(a) \times a \end{aligned}$$

Donc l'équation de la tangente T_A est :

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a \Leftrightarrow\ y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

□

Exemple

Déterminer l'équation de la tangente T_1 à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, en $a = 1$.

Dans la méthode précédente, nous avons déjà montré que $f'(1) = 2$.
De plus $f(1) = 1^2 = 1$,
Donc en appliquant la formule du théorème, la tangente T_1 a pour équation :

$$\begin{aligned} y = f'(1)(x - 1) + f(1) &\Leftrightarrow y = 2(x - 1) + 1 \\ &\Leftrightarrow y = 2x - 2 + 1 \\ &\Leftrightarrow y = 2x - 1 \end{aligned}$$

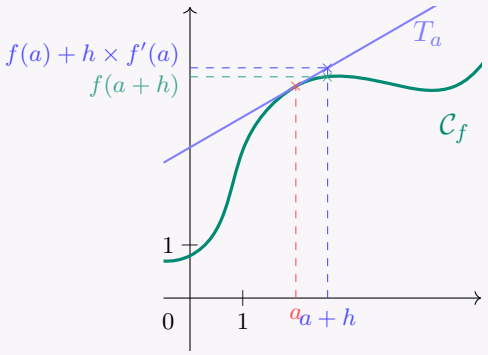
Remarque

La fonction affine associée à la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est appelée « **meilleure approximation affine de f en a** ».

2.3 Application : Calcul d'une valeur approchée de $f(a + h)$

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable en un réel a.
Pour h suffisamment petit : $f(a + h) \approx f(a) + h \times f'(a)$



Remarques

- Approcher la valeur $f(a + h)$ par $f(a) + h \times f'(a)$, revient graphiquement à avoir « suivi » la tangente plutôt que la courbe représentative de f.

- Cette propriété sert lorsqu'on connait $f(a)$ et $f'(a)$ mais qu'on ne connait pas explicitement f.
- Cette approximation est la base de la méthode d'Euler qui nous servira à construire la courbe représentative de la fonction exponentielle plus tard dans l'année.

3 Fonction dérivée :

3.1 Définitions :

Définition 3 – Fonction dérivable sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à images dans $\mathbb{R}$. La fonction f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout réel $a \in I$.

Définition 4 – Fonction dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. La fonction qui à $a \in I$ associe le nombre dérivé de f en a est alors notée f' et se nomme « fonction dérivée de f » sur I.

$$\begin{aligned} f' : I &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto f'(a) \end{aligned}$$

3.2 Fonctions dérivées des fonctions usuelles :

$f(x)$	Enssemble de définition	$f'(x)$	Ensemble de dérivation
p avec $p \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$mx+p$	$\mathbb{R}$	m	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
x^n avec $n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	-1 si $x<0$ 1 si $x>0$	$\mathbb{R}^*$

Preuve

Les preuves de ces formules sont faites dans la feuille d'exercices.

4 Opérations sur les fonctions dérivées :

4.1 Somme de deux fonctions :

Théorème 2 – Dérivée d'une somme

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
La fonction $u+v$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Preuve

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
Pour tout $a \in I$, et pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a+h \in I$,

$$\begin{aligned}\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} &= \frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)-u(a)+v(a+h)-v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}\end{aligned}$$

Or u et v sont dérivables en a,
Donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a) \text{ et } \lim_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$$

Donc

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} \\ &= u'(a)+v'(a)\end{aligned}$$

Donc $u+v$ est dérivable en a et $(u+v)'(a) = u'(a)+v'(a)$

□

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = x^6 + \dfrac{1}{x}$. Déterminons la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$.

- $x \mapsto x^6$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = 6x^5 - \frac{1}{x^2}$$

4.2 Fonction de la forme $\lambda.u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Théorème 3

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et λ un réel.
La fonction $.u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$(\lambda.u)'(x) = \lambda \times u'(x)$$

Preuve

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et λ un réel.
Pour tout $a \in I$, et pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in I$,

$$\begin{aligned}\frac{(.u)(a+h) - (\lambda.u)(a)}{h} &= \frac{\lambda \times u(a+h) - \lambda \times u(a)}{h} \\ &= \frac{\lambda \times (u(a+h) - u(a))}{h} \\ &= \lambda \frac{u(a+h) - u(a)}{h}\end{aligned}$$

Or u est dérivable en a donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$$

donc

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{(\lambda.u)(a+h) - (\lambda.u)(a)}{h} &= \lambda \times \lim_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \\ &= \lambda \times u'(a)\end{aligned}$$

Donc $\lambda.u$ est dérivable en a et $(\lambda.u)'(a) = \lambda \times u'(a)$

□

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 8x^5$. Déterminons la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

- $x \mapsto x^5$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$,

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de fonction dérivable avec un réel, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= 8 \times 5x^{5-1} \\ &= 40x^4\end{aligned}$$

4.3 Produit de deux fonctions :

Théorème 4 – Dérivée d'un produit de fonctions dérivables

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. La fonction $u.v$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$(u.v)'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

Preuve

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
Pour tout $a \in I$, et pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in I$,

$$\begin{aligned}
\frac{(u.v)(a+h) - (u.v)(a)}{h} &= \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h} \\
&= \frac{(u.v)(a+h) - u(a) \times v(a+h) + u(a) \times v(a+h) - u(a).v(a)}{h} \\
&= \frac{(u(a+h) - u(a)) \times v(a+h) + u(a) \times (v(a+h) - v(a))}{h} \\
&= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h}
\end{aligned}$$

Or u et v sont dérivables en a,
Donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a) \text{ et } \lim_{h \to 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$$

De plus on admet que

$$\lim_{h \to 0} v(a+h) = v(a)$$

Donc

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \right) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a)$$

Donc $u.v$ est dérivable en a et $(u.v)'(a) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a)$

□

Méthode 2 – Dérivée d'un produit de fonctions dérivables

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left(x^2 - 3\right) x^4$.
Déterminons la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

f est de la forme $u.v$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$: $u(x) = x^2 - 3$ et $v(x) = x^4$
u et v sont dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 4x^3$
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x).v(x) + u(x).v'(x) \\
&= 2x \times x^4 + \left(x^2 - 3\right) \times 4x^3 \\
&= 2x^5 + 4x^5 - 12x^3 \\
f'(x) &= 6x^5 - 12x^3
\end{aligned}$$

4.4 Quotient de deux fonctions :

Théorème 5 – Quotient de fonctions dérivables (Admis)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ avec $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.
La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{(v(x))^2}$$

Méthode 3

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R} - \{5\}$ par $f(x) = \dfrac{3x+6}{10-2x}$.
Déterminer f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R} - \{5\}$.

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R} - \{5\}$: $u(x) = 3x + 6$ et $v(x) = 10 - 2x$.
u et v sont dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R} - \{5\}$: $u'(x) = 3$ et $v'(x) = -2$.
De plus v ne s'annule pas sur $\mathbb{R} - \{5\}$,
Donc $f = \frac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{5\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} - \{5\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{3 \times (10-2x) - (3x+6) \times (-2)}{(10-2x)^2} \\ &= \frac{30 - 6x + 6x + 12}{(10-2x)^2} \\ f'(x) &= \frac{42}{(10-2x)^2} \end{aligned}$$

4.5 Tableau récapitulatif :

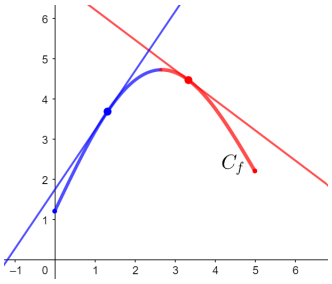
f	f'
$\lambda.u$	$\lambda.u'$
$u + v$	$u' + v'$
$u.v$	$u'.v + u.v'$
$\frac{1}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	$\frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

5 Applications de la dérivation :

5.1 Étude du sens de variation d'une fonction :

Rappel : Nous souhaitions étudier les coefficients directeurs des tangentes à la courbe représentative d'une fonction f afin de connaître leurs signes et d'en déduire les variations de la fonction f elle même. Le théorème suivant est donc tout naturel.

- Lorsque les tangentes ont un coefficient directeur positif (exemple : tangente tracée en bleu), elles décrivent une courbe représentative d'une fonction croissante (ici sur l'intervalle $[0; 2.5]$).
- Lorsque les tangentes ont un coefficient directeur positif (exemple : tangente tracée en rouge), elles décrivent une courbe représentative d'une fonction croissante (ici sur l'intervalle $[2.5; 5]$).



Théorème 6 – Sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Remarques

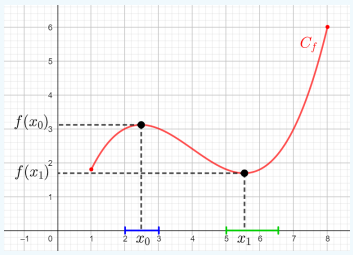
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ mais que $f'(x) = 0$ seulement pour un nombre fini de réels, alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ mais que $f'(x) = 0$ seulement pour un nombre fini de réels, alors f est strictement décroissante sur I.

5.2 Étude d'extrema pour une fonction :

Définition 5 – maximum local et minimum local

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et x_0 un réel tel que $x_0 \in I$.

- f admet un maximum local en x_0 égal à $f(x_0)$, si et seulement si, il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant x_0 tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \leq f(x_0)$.
- f admet un minimum local en x_1 égal à $f(x_1)$, si et seulement si, il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant x_1 tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \geq f(x_1)$



Remarques

- On dit que la fonction f admet un extremum sur un intervalle I lorsqu'elle admet un maximum ou un minimum sur I.
- L'extremum est dit local lorsqu'il n'est pas forcément valable sur l'ensemble de définition de f.
  Par exemple :

Sur le graphique présent dans la définition, le maximum $f(x_0)$ est local mais ce n'est pas le maximum de la fonction f sur son ensemble de définition car $f(8) \geq f(x_0)$.
En revanche, $f(x_1)$ est un minimum local, mais aussi le minimum de f sur son ensemble de définition.