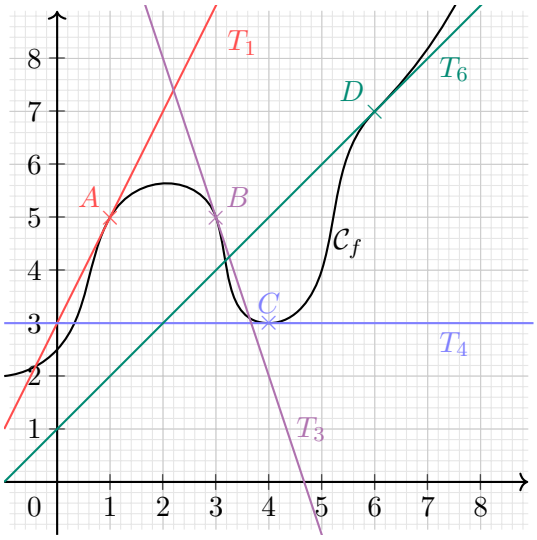
Chapitre 4 - Feuille d'exercices

Dérivation

Le nombre dérivé et les tangentes

Exercice 1 ..... Correction

Soit f la fonction représentée ci-dessous par la courbe $\mathcal{C}_f$.
Les droites T_1, T_3, T_4 et T_6 sont les tangentes à $\mathcal{C}_f$ respectivement aux points A, B, C et D.

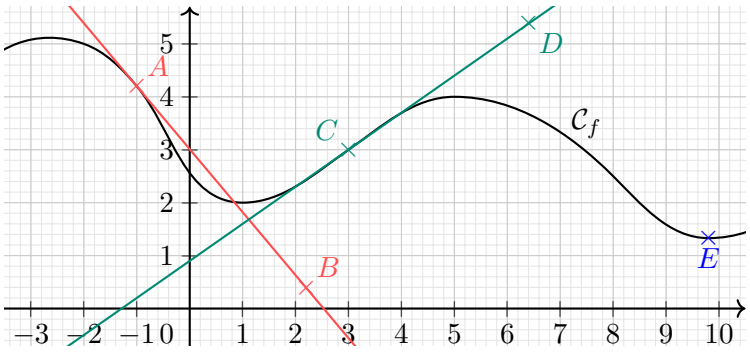


1. Déterminer graphiquement $f'(1)$, $f'(3)$, $f'(4)$ et $f'(6)$.
2. Déterminer les équations des tangentes T_1, T_3, T_4 et T_6.

Exercice 2 ..... Correction

Soit f la fonction représentée ci-dessous par la courbe $\mathcal{C}_f$. On sait que :

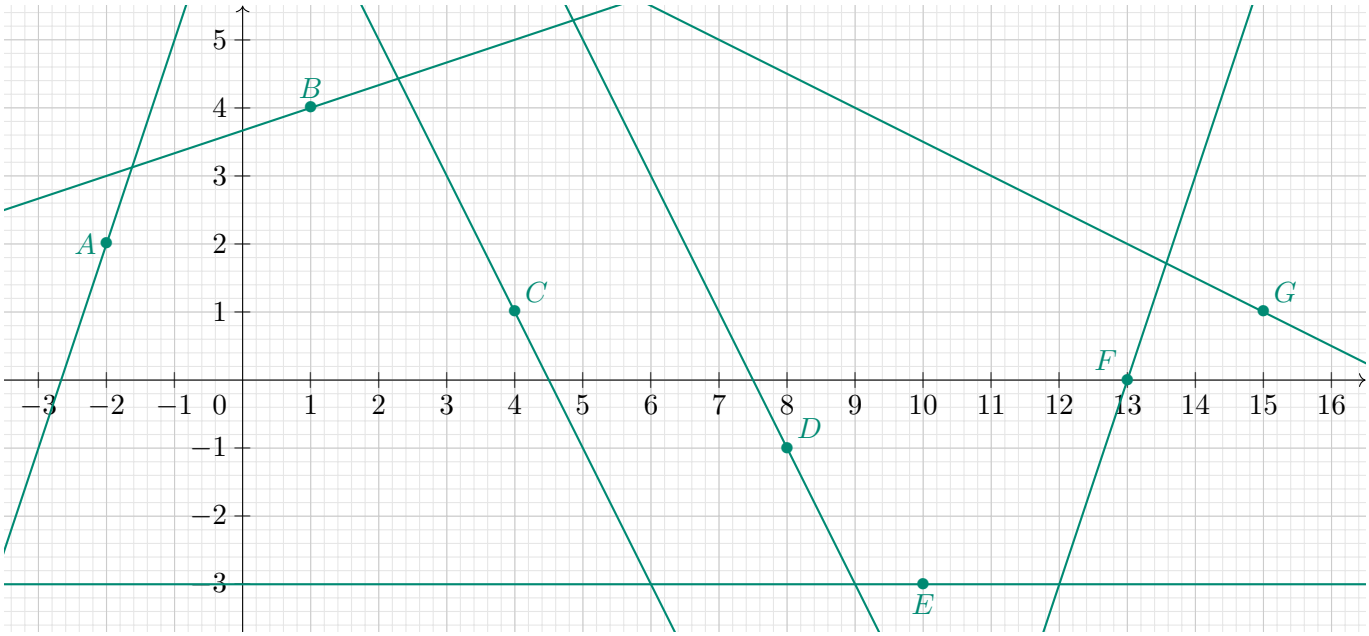
- $A(-1\,;4,2)$, $B(2,2\,;0,4)$, $C(3\,;3)$, $D\left(\frac{32}{5}\,;\frac{27}{5}\right)$ et $E\left(\frac{49}{5}\,;\frac{4}{3}\right)$;
- Les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points A et C, sont respectivement les droites (AB) et (CD) ;
- La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point E est horizontale ;



1. Déterminer, par le calcul, les valeurs de $f'(-1)$, $f'(3)$ et $f'(\frac{49}{5})$.
2. En déduire des équations des tangentes à $\mathcal{C}_f$ en A, C et E.

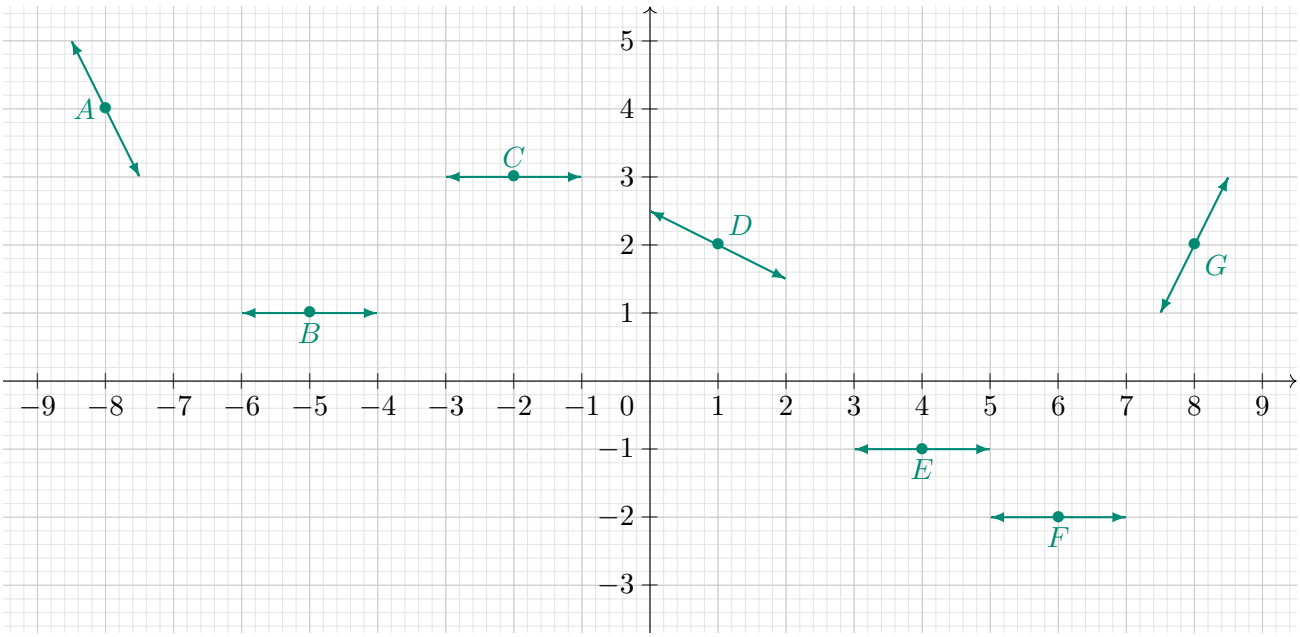
Exercice 3 ..... Correction

Sur le graphique suivant, tracer une courbe passant par les différents points, telle que les tangentes en ces points soient les droites tracées.
La fonction doit être définie sur l'intervalle $[-2\,;\,15]$.



Exercice 4 ..... Correction

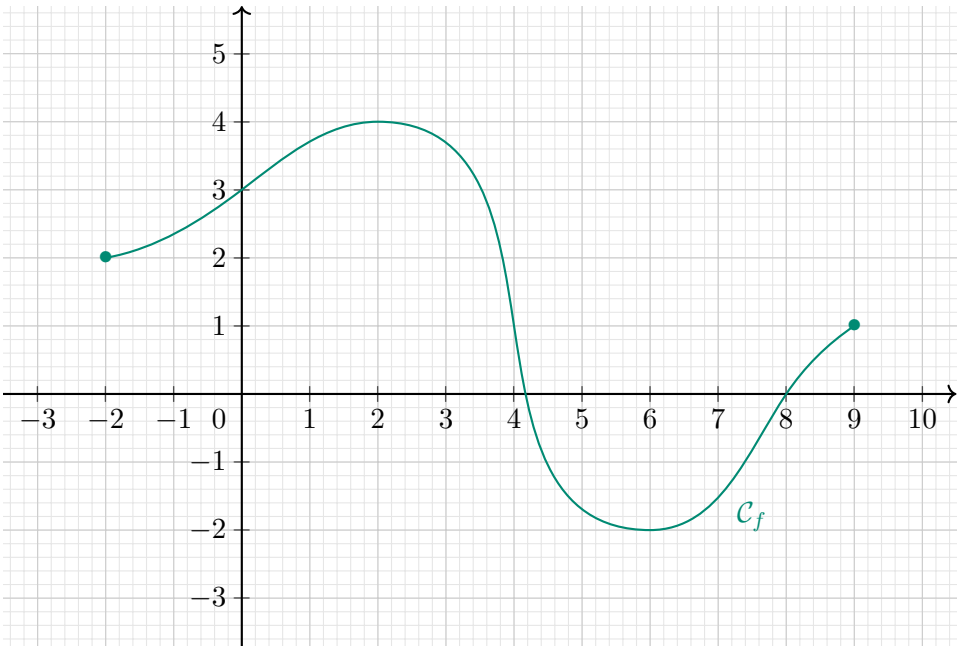
Sur le graphique suivant, tracer une courbe passant par les différents points, telle que les tangentes en ces points soient les droites tracées.
La fonction doit être définie sur l'intervalle $[-8\,;\,8]$.



Remarque
Une tangente ne nous intéresse généralement qu'au voisinage du point de la courbe où elle est tangente. Il n'est donc pas rare qu'elle ne soit pas tracée entièrement, mais seulement autour du point. Les flèches traduisent le fait qu'elle pourrait être étendue sur un plus grand intervalle.

Exercice 5 ..... Correction

Soit f la fonction définie sur $[-2\,;9]$, dont la courbe $\mathcal{C}_f$ est tracée ci-dessous .



1. Déterminer graphiquement le signe des nombres dérivés suivants : $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(5)$, $f'(\pi)$, $f'(6)$ et $f'(8)$.
2. Déterminer graphiquement l'ensemble des réels a pour lesquels $f'(a) < 0$ et ceux pour lesquels $f'(a) > 0$.
3. Compléter les tableaux suivants :

a	-2		9
Signe de $f'(a)$			

x	-2		9
Variations de f			

Exercice 6 ..... Correction

Soit f la fonction carré.

1. Déterminer les nombres dérivés, s'ils existent de la fonction f en -2, 0 et 1.
2. Soit a un nombre réel, déterminer une expression de $f'(a)$ lorsqu'il existe.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 4.

Exercice 7 ..... Correction

Soit f la fonction inverse.

1. Déterminer les nombres dérivés, s'ils existent de la fonction f en -2 et 1.
2. Soit a un nombre réel non nul, déterminer une expression de $f'(a)$ lorsqu'il existe.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 4.

Exercice 8 ..... Correction

Soit f la fonction cube.

1. Déterminer les nombres dérivés, s'ils existent de la fonction f en 0 et en 1.
2. Soit a un nombre réel, déterminer une expression de $f'(a)$ lorsqu'il existe.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 4.

Fonctions dérivées et opérations

Exercice 9 ..... Correction

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies sur I :

1. $f(x) = 3x^2 + 2x - 5 \qquad I = \mathbb{R}$
2. $g(x) = 9x^5 - 12x^4 + 3x^2 \qquad I = \mathbb{R}$
3. $h(x) = -4x^7 + 54x^2 + 9 \qquad I = \mathbb{R}$
4. $i(x) = \dfrac{3}{x^2} \qquad I = \mathbb{R}^*$
5. $j(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{6}{x} \qquad I = \mathbb{R}^*$
6. $k(x) = \sqrt{x} + 30x^2 \qquad I = \mathbb{R}_+^*$
7. $l(x) = 5x^6 - 6\sqrt{x} \qquad I = \mathbb{R}_+^*$
8. $m(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2 + 1}{4} \qquad I = \mathbb{R}$

Exercice 10 – Avec les formules $u.v$ et $\dfrac{u}{v}$ ..... Correction

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies sur I :

1. $f(x) = (3x + 5)(x^2 + 4x) \qquad I = \mathbb{R}$
2. $g(x) = \left(-2x^5 + 4x^2 - 4\right)\left(x^3 + 3\right) \qquad I = \mathbb{R}$
3. $h(x) = \left(x^3 + 2x - 3\right)\sqrt{x} \qquad I = \mathbb{R}_+^*$
4. $i(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 + 1} \qquad I = \mathbb{R}$
5. $j(x) = \dfrac{6x^2 + 3x + 1}{x^2 + x + 1} \qquad I = \mathbb{R}$
6. $k(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2} - 1 \qquad I = [1\ ;\ +\infty[$

Exercice 11 – Avec la formule $x \mapsto u(ax + b)$ ..... Correction

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies sur I :

1. $f(x) = (3x + 4)^2 \qquad I = \mathbb{R}$
2. $g(x) = (8 - 2x)^5 \qquad I = \mathbb{R}$
3. $h(x) = 7\left(-\dfrac{2}{3}x + 4\right)^3 \qquad I = \mathbb{R}$
4. $i(x) = -7x(5x - 12)^4 \qquad I = \mathbb{R}$
5. $j(x) = \left(\dfrac{1}{-4x - 3}\right)^3 \qquad I = \mathbb{R}_+$
6. $k(x) = \sqrt{2x + 5} \qquad I = \mathbb{R}_+$

Exercice 12 ..... Correction

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par :

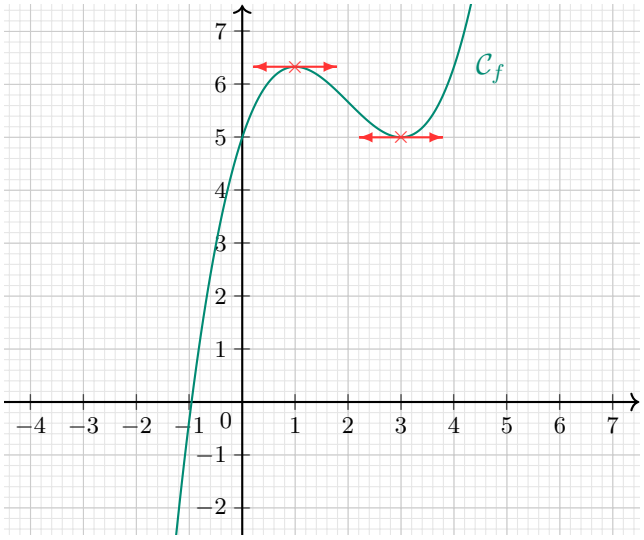
$$f(x) = \frac{1}{3x+2}$$

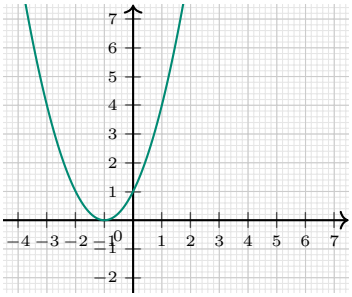
Déterminer une expression de f', la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ avec 3 méthodes différentes.

Exercice 13 ..... Correction

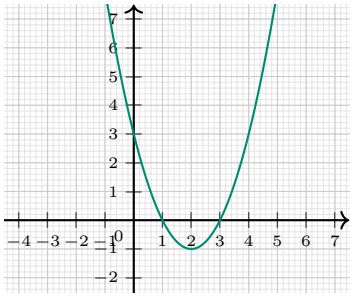
Soit f la fonction dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est tracée sur le graphique ci-contre.
Parmi les quatre courbes suivantes, se trouve la courbe représentative de la fonction dérivée de f.

Déterminer le graphique sur lequel est tracée la représentation graphique de la fonction dérivée de f.

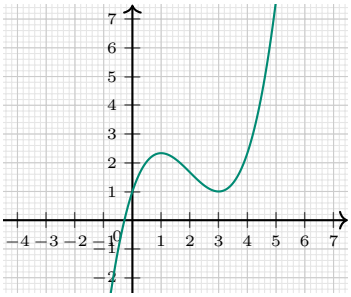




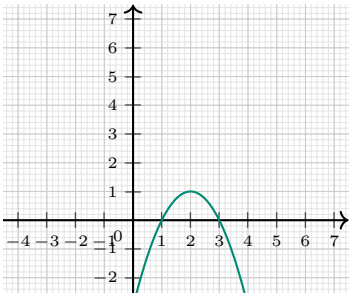
Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

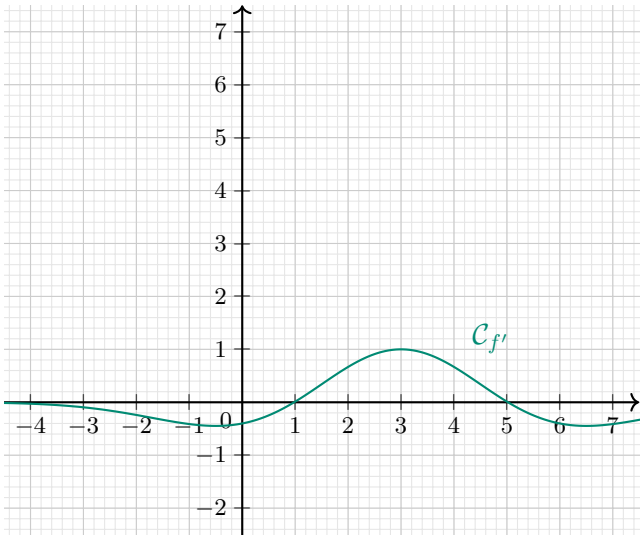


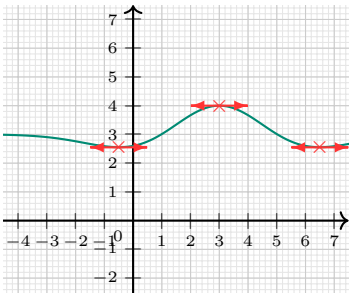
Graphique 4

Exercice 14 ..... Correction

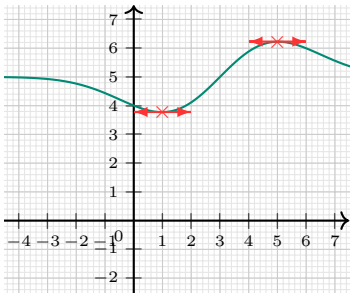
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.
Sur le graphique ci-contre, a été tracée $\mathcal{C}_{f'}$, la courbe représentative de f'.

Déterminer les éventuels graphiques sur lesquels sont tracées des courbes pouvant correspondre à la représentation graphique de f.

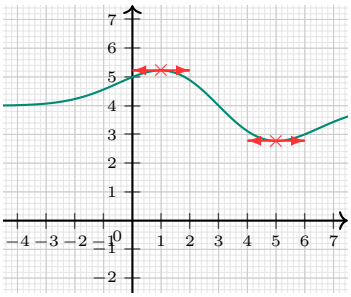




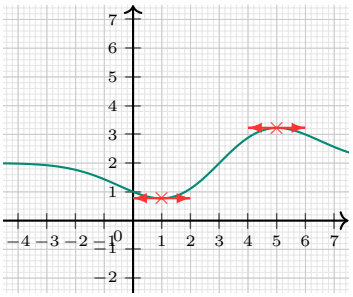
Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3



Graphique 4

Exercice 15 ..... Correction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 6x + 16$$

1. Déterminer une expression de f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$, écrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.
3. Existe-t-il une tangente dont le coefficient directeur est -4 ? Si oui, déterminer l'abscisse du point de la courbe concerné.
4. Existe-t-il une tangente passant par l'origine du repère ? Si oui, déterminer l'abscisse du point de la courbe concerné.

Exercice 16 ..... Correction

Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie les conditions :

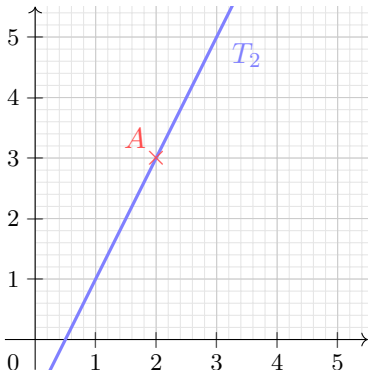
$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 4 \qquad \text{et} \qquad f'(3) = -8.$$

Exercice 17 ..... Correction

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit f une fonction dont la courbe représentative passe par le point $A(2\,;3)$ et a pour tangente au point A, la droite T_2.

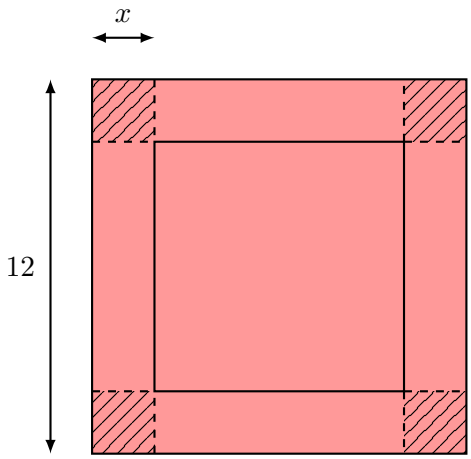
   Déterminer graphiquement une approximation de $f(2{,}5)$ et de $f(1{,}8)$.

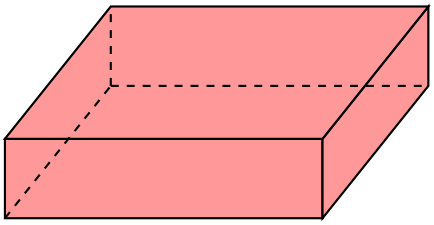


2. f est une fonction telle que $f(2) = 3$ et $f'(2) = 1$.
   a. Déterminer une approximation de $f(2{,}1)$ puis de $f(3)$.
   b. À laquelle de ces deux approximations peut-on, a priori, faire le plus confiance ?
3. f est une fonction telle que $f(5) = 4$ et $f'(5) = \dfrac{1}{2}$. Déterminer une approximation de $f(4{,}9)$ puis de $f(5{,}15)$.

Applications, études de fonctions

Exercice 18 ..... Banque E3C - Correction





Soit un carré de côté 12.
On découpe dans les quatre angles des carrés de côté x pour construire le patron d'une boite sans couvercle.

1. Justifier que l'ensemble des valeurs prises pour x est l'intervalle $[0\,;\,6]$.
2. Montrer que le volume de cette boîte est donné par :
$$\mathcal{V}(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$$
3. Étudier la fonction $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire qu'il existe une valeur de x pour laquelle le volume de la boite est maximal. Que vaut ce volume ?

Exercice 19 ..... Banque E3C - Correction

1. Étudier le signe de la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$P(x) = x^2 + 4x + 3$$

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$$
et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.

2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$:
$$f'(x) = \frac{P(x)}{(x+2)^2}$$
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-2\,;\,+\infty[$ et construire le tableau de variations de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$.
4. Donner le minimum de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$ et la valeur pour laquelle il est atteint (on donnera les valeurs exactes).
5. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Exercice 20 ..... Banque E3C - Correction

Partie A

Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de :

$$P(x) = -10x^2 - 40x + 120$$

Partie B

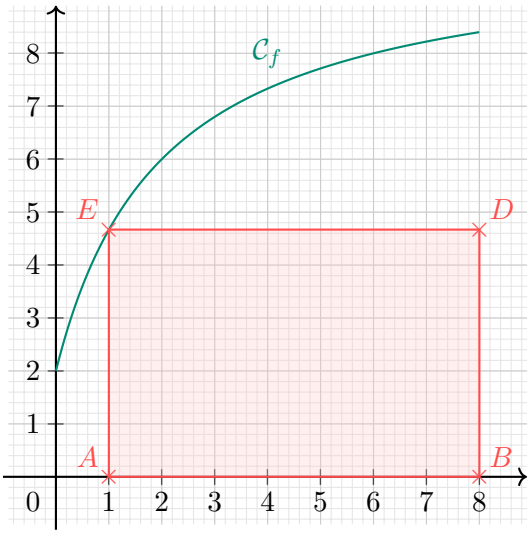
On se place dans un repère orthonormé. La courbe $\mathcal{H}$ est représentée sur le graphique ci-dessous est l'ensemble des points de l'hyperbole d'équation :

$$y = \frac{10x + 4}{x + 2}$$

avec x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,8]$.

Pour tout abscisse x dans l'intervalle $[0\,;\,8]$, on construit le rectangle $ABDE$ comme indiqué sur la figure. On donne les informations suivantes :

- A et B appartiennent à l'axe des abscisses ;
- A est d'abscisse x ;
- B et D ont pour abscisse 8 ;
- E appartient à la courbe $\mathcal{H}$;
- D et E ont la même ordonnée.



L'objectif de ce problème est de déterminer la ou les valeurs éventuelles x de l'intervalle $[0\,;\,8]$ correspondant à un rectangle $ABDE$ d'aire maximale.

1. Déterminer l'aire du rectangle $ABDE$ lorsque $x = 0$.
2. Déterminer l'aire du rectangle $ABDE$ lorsque $x = 4$.

On définit la fonction f qui à tout réel x de $[0\,;\,8]$, associe l'aire du rectangle $ABDE$. On admet que :

$$f(x) = \frac{-10x^2 + 76x + 32}{x + 2}$$

3. Répondre qu problème posé.

Exercice 21 ..... Correction

Soit f la fonction définie pour tout $x \in [-3\ ;\ 6]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 5$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $[-3\ ;\ 6]$ et dresser son tableau de variations.

   On pourra admettre que $f(-3) = -31$ $f(1) = \dfrac{19}{3}$, $f(3) = 5$ et $f(6) = 23$.

2. a. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
   b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

3. Déterminer le signe de f sur $[-3\ ;\ 6]$.

Exercice 22 ..... Correction

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1}$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. **Étude d'une fonction auxiliaire :**

   Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

   $$g(x) = x^3 + 3x + 4$$

   a. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

   b. Dresser le tableau de variations de g.

   c. Calculer $g(-1)$ et en déduire le signe de $g(x)$. On utilisera les variations de g sur $\mathbb{R}$.

2. **Étude de la fonction f :**

   a. Déterminer une expression de la fonction dérivée de f, notée f'.

   b. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

   c. Déterminer quatre réels a, b, c et d tels que pour tout réel x :

   $$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$$

   d. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$.

Exercice 23 ..... Correction

Soit f la fonction définie pour tout réel x non nul par :

$$f(x) = \frac{3}{4}x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

A. **Étude de la fonction auxiliaire :**

Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = 3x^3 - 4x - 8$$

1. Étudier le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
2. a. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.

   b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

B. **Étude de la fonction f :**

1. Montrer que pour tout réel x non nul :

   $$f'(x) = \frac{g(x)}{4x^3}$$
2. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ et dresser son tableau de variations.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = \frac{3}{4}x + 1$.

a. Étudier le signe de $f(x) - \left(\frac{3}{4}x + 1\right)$ sur $\mathbb{R}^*$.

b. En déduire les positions relatives des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

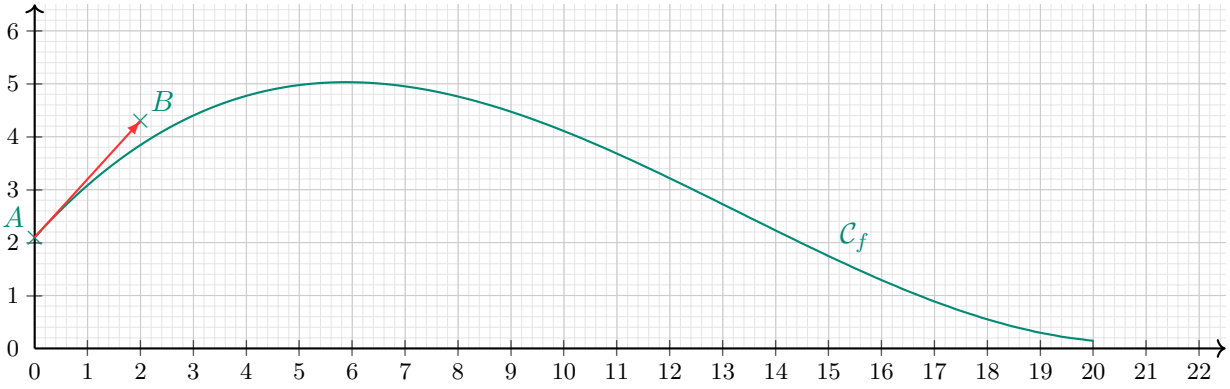
Exercice 24 ..... Banque E3C - Correction

Des pucerons envahissent une roseraie.
On introduit alors les coccinelles, prédatrices des pucerons, à l'instant $t = 0$, et on s'intéresse à l'évolution du nombre de pucerons à partir de cet instant et sur une période de 20 jours.

Partie A

Dans le repère ci-dessous, on a tracé :

- La courbe $\mathcal{C}$ représentant le nombre de milliers de pucerons en fonction du nombre de jours écoulés depuis l'introduction des coccinelles.
- La tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par les points $A(0\ ;\ 2,1)$ et $B(2\ ;\ 4,3)$.



1. Déterminer par lecture graphiquement le nombre de pucerons à l'instant où l'on introduit les coccinelles puis le nombre maximal de pucerons sur la période de 20 jours.
2. On assimilera la vitesse de prolifération des pucerons à l'instant t au nombre dérivé $f'(t)$.
   Déterminer graphiquement la vitesse de prolifération des pucerons à l'instant $t = 0$.

Partie B

On modélise l'évolution du nombre de pucerons par la fonction f définie, pour tout t appartenant l'intervalle $[0\,;\,20]$, par :

$$f(t) = 0,003t^3 - 0,12t^2 + 1,1t + 2,1$$

où t représente le nombre de jours écoulés depuis l'introduction des coccinelles et $f(t)$ le nombre de pucerons en milliers.

1. Déterminer $f'(t)$ pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,20]$ où f' désigne la dérivée de la fonction f.
2. Dresser le tableau de signes de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0\,;\,20]$.
3. En déduire le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,20]$. Préciser les images des valeurs de t apparaissant dans le tableau.