TD La loi binomiale.

Exercice 1
Un joueur de tennis effectue une mise en jeu. Pour cela, il a droit à deux tentatives: un premier service suivi, s'il n'est pas réussi, d'un deuxième service.

La probabilité pour que le premier service réussisse est $\frac{2}{3}$. S'il a échoué, la probabilité que le deuxième service réussisse est $\frac{4}{5}$.

Lorsque les deux services échouent, on dit qu'il y a double faute, sinon la mise en jeu est réussie.

1. Montrer que la probabilité que la mise en jeu soit réussie est égale à $\frac{14}{15}$.
2. Ce joueur fait 10 mises en jeu successives indépendantes. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de mises en jeu réussies.
   - Calculer p(X=k), k étant un entier compris entre 0 et 10.
   - Calculer la probabilité pour qu'il réussisse au moins 8 mises en jeu. Le résultat sera donné avec trois décimales.
   - Calculer l'espérance et l'écart type de X.

Exercice 2 Un entraîneur d'une équipe de football a étudié les statistiques de tir au but (pénalty) de ses joueurs.
Il a alors remarquer que sur une série de cinq tirs au but, un joueur pris au hasard dans son équipe marque
- 5 buts avec une probabilité de 0,2
- 4 buts avec une probabilité de 0,5
- 3 buts avec une probabilité de 0,3.

Chaque joueur, à l'entraînement, tire 2 séries de 5 ballons. On admet que les résultats d'un joueur à chacune des 2 séries sont indépendants.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirs aux buts réussis par un joueur au cours d'un entraînement.

I. **a .** Calculez la probabilité, pour un joueur pris au hasard, de réussir tous ses tirs au buts lors d'un entraînement.

b . Précisez les valeurs possibles pour X et établir sa loi de probabilité.
(on pourra s'aider d'un arbre).

c . Calculez l'espérance de X .

II. L'entraîneur considère que le joueur a réussi l'épreuve des tirs au but lorsque $X \geq 8$.
Montrez que la probabilité pour un joueur de réussir cette épreuve lors d'un entraînement est égale à 0,61 .

III. Chaque joueur participe à 10 séances d'entraînement.
On admet que les épreuves de tirs au but sont indépendantes les unes des autres.
On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de succès d'un joueur à l'épreuve des tirs au but au cours des ces 10 entraînements, c'est à dire le nombre de fois où il a marqué au moins 8 buts.
Si au cours d'une séance d'entraînement, il ne marque pas au moins 8 buts, on dit qu'il a eu un échec.

Les résultats seront donnés par défaut, avec 3 *chiffres après la virgule.*

Calculez pour un joueur :

a . la probabilité de n'avoir aucun échec lors des 10 séances.
b . la probabilité d'avoir exactement 6 succès .
c . la probabilité d'avoir au moins 1 succès.

Exercice 3 Une compagnie de transport, dont la clientèle est composée d'usagers réguliers effectuant 40 trajets par mois (1 le matin et 1 le soir pendant 20jours) étudie un projet offrant à ces usagers le choix entre:

- un titre de transport (noté C dans ce qui suit) de 60 € pour l'ensemble des trajets mensuels;

- pour les voyageurs ne voulant pas se procurer le titre de transport C, le paiement d'une taxe de M € en cas de contrôle.

La compagnie prévoit d'organiser les contrôles de façon que la probabilité d'un tel contrôle soit pour chaque trajet égale à $\frac{1}{10}$, avec indépendance d'un trajet par rapport à l'autre.

Le but de l'exercice est de déterminer le montant M de la taxe pour que, du point de vue du calcul des probabilités, les deux choix proposés aux voyageurs soient financièrement équivalents pour la compagnie.

Soit A un voyageur pris au hasard. On note X la variable aléatoire "nombre de trajets de A contrôlés sur un mois".

1. Donner la loi de probabilité de X, c'est à dire l'expression en fonction de k de P(X=k) pour k compris entre 0 et 40.
2. Calculer le nombre moyen de trajets contrôlés, c'est à dire l'espérance de X.
3. Quel sera, en fonction de M, le coût moyen mensuel des trajets pour un usager qui ne se procurera pas le titre de transport C? En déduire la valeur qu'il convient de donner à M pour que, en moyenne, les deux choix proposés aux usagers soient financièrement équivalents pour la compagnie.
4. Donner les valeurs approchées à 0.001 près des probabilités p(X=0), p(X=1), p(X=2) et p(X=3). Si A ne s'est pas procuré le titre de transport C, quel est la probabilité pour que le coût de ses trajets soit au moins égal à 60€?

EXERCICE 4

Une petite entreprise emploie vingt personnes. Une étude statistique permet d'admettre qu'un jour donné la probabilité pour qu'un employé donné soit absent est 0,05.
On admet que les absences des employés survenues un jour donné sont indépendantes les unes des autres. On note X la variable aléatoire qui à chaque jour choisi au hasard associe le nombre d'employés absents.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :

E1 : « un jour donné, il y a exactement trois absents »
E2 : « un jour donné, il y a strictement plus de deux absents »
E3 : « un jour donné, le nombre d'absents est compris entre trois et six (bornes comprises) »

3. Calculer l'espérance de X. Que représente ce nombre ?

EXERCICE 5

3% des bouteilles d'eau fabriquées par une usine sont défectueuses. On choisit au hasard 100 bouteilles dans la production d'une journée. La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. Soit X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 100 bouteilles associe le nombre de bouteilles défectueuses. X suit donc une loi binomiale.

1. Précisez les paramètres de cette loi.
2. Déterminer à 0,001 près la probabilité des trois événements suivants :

A : « un tel lot n'a aucune bouteille défectueuse »
B : « un tel lot a exactement deux bouteilles défectueuses »
C : « un tel lot a au plus deux bouteilles défectueuses ».