

Fonctions logarithme, exponentielles et puissances.

- ① La **fonction logarithme** que l'on note $\ln$ ($x \mapsto \ln x$ avec $x > 0$) admet les propriétés suivantes :

Valeurs particulières : $\ln 1 = 0$ et on note e le nombre qui vérifie $\ln e = 1$,

Propriétés algébriques : $\ln ab = \ln a + \ln b$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$ et $\ln a^r = r \ln a$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

Limites particulières : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

Dérivées et tableau de variation : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ où u est une fonction dérivable qui ne prend que des valeurs strictement positives.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$		+	+
$f(x) = \ln x$	$-\infty$	0	$+\infty$

- ② La **fonction exponentielle** que l'on note e ($x \mapsto e^x$) admet les propriétés suivantes :

Valeurs particulières : $e^0 = 1$, $e^1 = e$ et pour tout nombre x on a $e^x > 0$.

Propriétés algébriques : $e^{a+b} = e^a e^b$, $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$, $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ et $(e^a)^n = e^{na}$.

Limites particulières : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Dérivées et tableau de variation : $(e^x)' = e^x$ et $(e^u)' = u' e^u$ où u est une fonction dérivable.

Relation avec le logarithme : pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$ et pour tout réel > 0 , $e^{\ln x} = x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x) = e^x$		+	
$f(x) = e^x$	0		$+\infty$

- ③ La **fonction exponentielle de base a** (avec $a > 0$ et $a \neq 1$) que l'on note a ($x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$) admet les propriétés suivantes :

Valeurs particulières : $a^0 = 1$, $a^1 = a$ et pour tout nombre x on a $a^x > 0$.

Propriétés algébriques : $a^{x+y} = a^x a^y$, $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $(a^x)^y = a^{xy}$ et $(ab)^x = a^x b^x$.

Limites particulières : $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < a < 1 \\ 0 & \text{si } a > 1 \end{cases}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$.

Dérivées et tableaux de variation : $(a^x)' = (\ln a) a^x$ et $(a^u)' = (u' \ln a) a^u$ où u est une fonction dérivable.

Si $0 < a < 1$	
x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x) = (\ln a) a^x$	-
$f(x) = a^x$	$+\infty$ $\rightarrow$ 0

Si $a > 1$	
x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x) = (\ln a) a^x$	+
$f(x) = a^x$	0 $\rightarrow$ $+\infty$

- ④ Les **fonctions puissances** ($x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ avec $x > 0$ et α un réel fixé) admettent les propriétés suivantes : toutes les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.

Limites particulières : $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 0 \\ 0 & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$.

Dérivées et tableaux de variation $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Si $\alpha < 0$	
x	0 $+\infty$
$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	-
$f(x) = x^\alpha$	$+\infty$ $\rightarrow$ 0

Si $\alpha > 0$	
x	0 $+\infty$
$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	+
$f(x) = x^\alpha$	0 $\rightarrow$ $+\infty$

- ⑤ **Croissance comparée** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x = 0$ où α est strictement positif.