المظاهر الطاقية
Aspects énergétiques

1-تذكير ببعض التعلمات الأساسية المكتسبة:

1-1-شغل قوة ثابتة مطبقة على جسم صلب في حركة إزاحة:

شغل قوة ثابتة $\vec{F}$ مطبقة على جسم صلب في حركة إزاحة خلال إنتقال نقطة تأثيرها من القطة A إلى النقطة B هو :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB.\cos(\vec{F},\overrightarrow{AB})$$

ملحوظة: الشغل الجزئي الذي نرمز إليه ب: δW خلال انتقال جزئي $\delta\ell$ ، يعبر عنه كما يلي : $\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{\delta\ell}$.

1-2-مبرهنة الطاقة الحركية:

في معلم غاليلي ، تغير الطاقة الحركية لجسم صلب (في حركة إزاحة أو في حركة دوران حول محور ثابت) بين لحظتين يساوي المجموع الجبري لأشغال القوى الخارجية المطبقة عليه بين هاتين اللحظتين .

$$\Delta E_C = \sum W\vec{F}_{ext} \quad \text{مع :} \quad \Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i}$$

- الطاقة الحركية بالنسبة لجسم صلب كتلته m وسرعته v في حركة إزاحة هي: $E_C = \frac{1}{2}.m.v^2$.
- الطاقة الحركية بالنسبة لجسم صلب عزم قصوره J_Δ في حركة دورانية: $Ec = \frac{1}{2}J_\Delta.\omega^2$

1-3-الطاقة الميكانيكية:

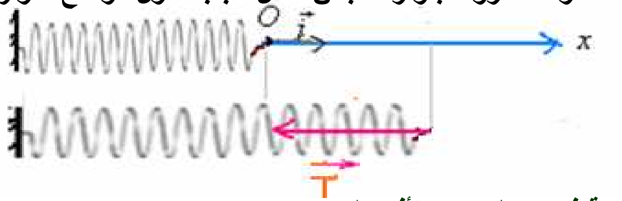
هي مجموع الطاقة الحركية وطاقة الوضع المرنة. $E_m = E_C + E_{pp}$

2-الدراسة الطاقية للنواس المرن:

2-1-شغل القوة المقرونة بتوتر النابض:

نعتبر نابضا ذي لفات غير متصلة صلابته K ، في وضع أفقي حيث أثبت أحد طرفيه إلى حامل ثابت.

نجذب النابض أفقيا بمسافة x_m ثم نحرره. لتكن $\vec{T}$ القوة المقرونة بتوتر النابض خلال تذبذبه حول موضع التوازن.



القوة $\vec{T} = -K.x\vec{i}$ قوة ارتداد ، هذه القوة غير ثابتة فهي تتعلق بالأفصول x.

الشغل الجزئي للقوة المطبقة من طرف النابض خلال انتقال جزئي $\overrightarrow{\delta\ell} = \delta x.\vec{i}$ هو :

$$\delta W = \vec{T}.\overrightarrow{\delta\ell} = -K.x.\vec{i}.\overrightarrow{\delta\ell} = -K.x.\vec{i}.\delta x.\vec{i} = -K.x.\delta x$$

إذن الشغل الجزئي $\delta W = -K.x.\delta x$

وبما أن الشغل الكلي يساوي مجموع الأشغال الجزئية ، يمكننا تحديد شغل القوة $\vec{T}$ خلال انتقال نقطة تأثيرها من نقطة M_1 ذات الأفصول x_1 إلى نقطة M_2 ذات الأفصول x_2 باستعمال الحساب التكاملي. بحيث لدينا: $dW = -K.x.dx$

$$W\vec{T}_{M_1 \to M_2} = \int_{x_1}^{x_2} -K.x.dx = -K\int_{x1}^{x2} x.dx = K.\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = -\frac{1}{2}K(x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2}K(x_1^2 - x_2^2)$$

بصفة عامة:

تعبير شغل القوة المقرونة بتوتر نابض خلال الانتقال من الموضع البدئي ذي الأفصول x_A إلى الموضع النهائي ذي الأفصول x_B هو كما يلي :

$$W\vec{T}_{A\to B} = \frac{1}{2}.K(x_A^2 - x_B^2)$$

2-2-الدراسة الطاقية للنواس المرن:

أ-طاقة الوضع المرنة:

طاقة الوضع المرنة للنواس المرن هي الطاقة التي تمتلكها المجموعة من جراء تشويه النابض وتعطيها العلاقة التالية :

$$Epe = \frac{1}{2}K.x^2 + c^{te}$$

حيث: K صلابة النابض . x : إطالته.

والثابتة c^{te} تحدد قيمتها باستعمال الحالة المرجعية .

وعمليا نختار كحالة المرجعية $Epe = 0$ عندما يكون النابض غير مشوها أي عند $x = 0$.

بالتعويض في التعبير السابق نحصل على $c^{te} = 0$.

وبالتالي يعبر عن طاقة الوضع للنواس المرن بالعلاقة: $E_{pe} = \frac{1}{2}K.x^2$ باعتبار $E_{pe} = 0$ عند $x = 0$.

ملحوظة1 : تغير طاقة الوضع المرنة لا يتعلق بالحالة المرجعية :

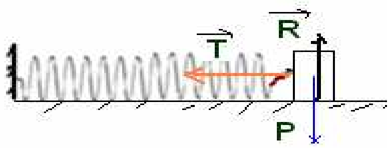
في الموضع x_1 لدينا : $Ep_1 = \frac{1}{2}k.x_1 + C$

في الموضع x_2 لدينا : $Ep_2 = \frac{1}{2}k.x_2 + C$

وتغير طاقة الوضع : $\Delta Ep = Ep_2 - Ep_1 = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)$

ب-انحفاظ الطاقة الميكانيكية:

نعتبر النواس المرن الأفقي خلا ل حركته التذبذبية .



بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على المجموعة خلال انتقال الجسم S من الموضع x_1 إلى الموضع x_2 .

$$\Delta Ec = W\vec{P} + W\vec{R} + W\vec{T}$$

$W\vec{R} = 0$ و $W\vec{P} = 0$ لأنهما متعامدتان مع اتجاه الحركة .

إذن: $\Delta Ec = W\vec{T}$ ولدينا : $W\vec{T}_{A->B} = \frac{1}{2}.K(x_1{}^2 - x_2{}^2) = -\Delta E_{pe}$ إذن العلاقة (1) تصبح. $\Delta Ec = -\Delta E_{pe}$

أي: $E_{c2} - E_{c1} = E_{p1} - E_{P2} \Leftarrow$ $E_{C1} + E_{P1} = E_{C2} + E_{P2}$

أي: $E_{M1} = E_{M2}$ وبالتالي الطاقة الميكانيكية للمجموعة تنحفظ بين الموضعين 1و2.

وبما أن الطاقة الميكانيكية: $E_M = Ec + Epe = \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.k.x^2$ مع: $Epe = 0$ عند $x = 0$.

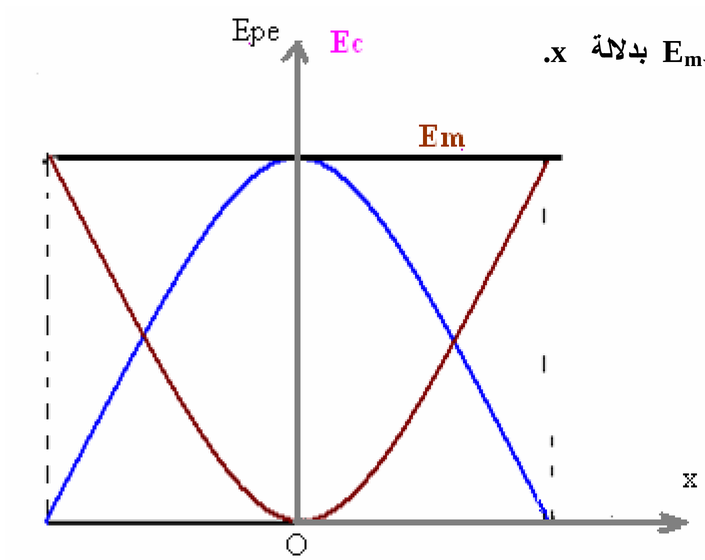
إذا كانت الاحتكاكات مهملة ، ليس هناك تبدد للطاقة أي الطاقة الميكانيكية للمجموعة تنحفظ: $E_M = C^{te}$

إذن: $\frac{dE_M}{dt} = 0 \Leftarrow \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.K.x^2) = 0 \Leftarrow \frac{1}{2}.m(2.v.\frac{dv}{dt}) + \frac{1}{2}.K.(2.x.\frac{dx}{dt}) = 0 \Leftarrow$

$m.\dot{x}.\ddot{x} + k.x.\dot{x} = 0 \Leftarrow$ $m.\ddot{x} + k.x = 0$ المعادلة التفاضلية للحركة ، مع: $\omega_0{}^2 = \frac{K}{m}$

ج-مخططات الطاقة:

يمكن تمثيل تغيرات E_{pe} و E_c و E_m بدلالة x.



وبما أن حل المعادلة التفاضلية $m.\ddot{x}+k.x=0$ هو دالة جيبية تكتب كما يلي : $x=x_m\cos(\omega_o.t+\varphi)$

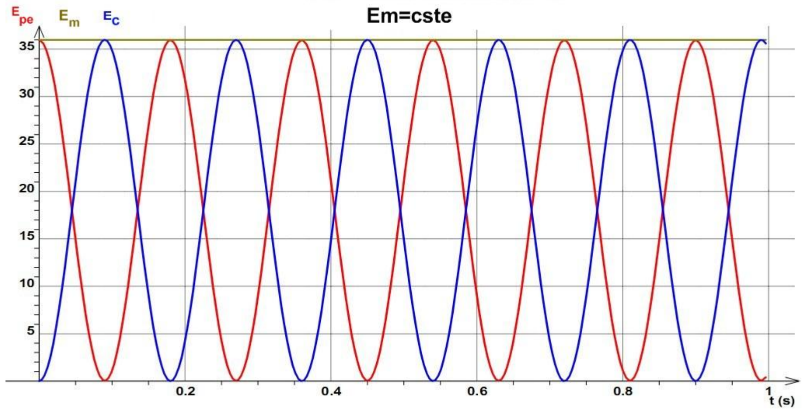
فإن : $$E_{pe}=\frac{1}{2}K.x^2=\frac{1}{2}K\,x^2{}_m.\cos^2(\omega_o.t+\varphi)$$

و : $$E_c=\frac{1}{2}.m.v^2=\frac{1}{2}\,m{x_m}^2\,{\omega_o}^2.\sin^2(\omega_o.t+\varphi)$$

إذن : $$E_m=E_{pt}+E_C=\frac{1}{2}K.{x_m}^2.\cos^2(\omega_o.t+\varphi)+\frac{1}{2}\,m\,{x_m}^2{\omega_0}^2\sin^2(\omega_o.t+\varphi)$$

نعوض $${\omega_0}^2=\frac{K}{m}$$

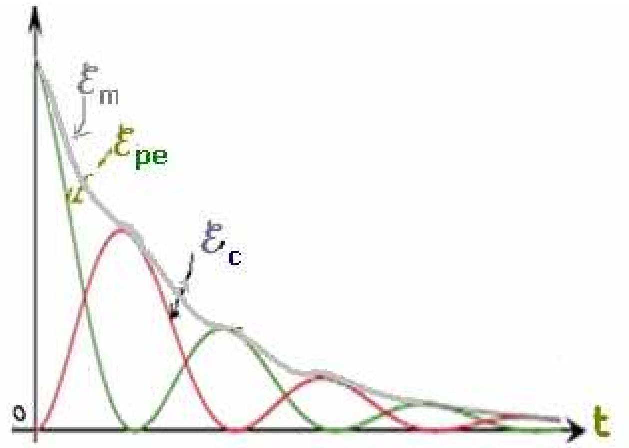
فنحصل على : $$E_m=\frac{1}{2}K\,{x_m}^2\left[\cos^2(\omega_o\,t+\varphi)+\sin^2(\omega_o.t+\varphi)\right]=\frac{1}{2}.K.{x_m}^2$$



$$E_m=\frac{1}{2}.K.{x_m}^2=C^{te}$$

د-في حالة وجود احتكاكات:

في هذه الحالة يتناقص وسع التذبذبات تدريجيا ، فنحصل على نظام شبه دوري (أو لا دوري وذلك حسب أهمية الاحتكاك).
الطاقة الميكانيكية للمجموعة تتناقص مع مرور الزمن إلى أن يتوقف المتذبذب عن الحركة .



3-الدراسة الطاقية لنواس اللي:

3-1-الطاقة الحركية للمجموعة:

تنحصر الطاقة الحركية لنواس اللي في الطاقة الحركية للقضيب $Ec=\frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2$ مع(J_Δ عزم قصور القضيب و $\dot{\theta}$ سرعته الزاوية)

3-2-طاقة الوضع للي:

طاقة الوضع للي تعطيها العلاقة التالية : $$E_{pt}=\frac{1}{2}.C.\theta^2+C^{te}$$

عادة نأخذ كحالة مرجعية $E_{pt}=0$ عند $\theta=0$ وبذلك تكون $C^{te}=0$.

وبالتالي : $$E_{pt}=\frac{1}{2}C.\theta^2$$

3-3-الطاقة الميكانيكية للمجموعة:

باعتبار كحالة مرجعية $E_{pt}=0$ عند 0 ، يكون تعبير الطاقة الميكانيكية لنواس اللي كما يلي : $\boxed{E_m=\frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}.C.\theta^2}$

إذا كانت الاحتكاكات مهملة ، ليس هناك تبدد للطاقة أي الطاقة الميكانيكية للمجموعة تنحفظ $E_M = C$

إذن : $\frac{dE_M}{dt}=0 \Leftarrow \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}C\theta^2)=0 \Leftarrow \frac{1}{2}J_\Delta(2\dot{\theta}.\frac{d\theta}{dt})+\frac{1}{2}C.(2\theta.\frac{d\theta}{dt})=0 \Leftarrow$

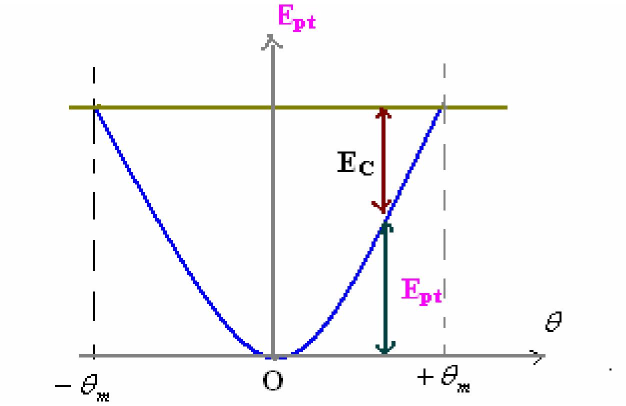
$J_\Delta\,\dot{\theta}\ddot{\theta}+C\,\theta.\dot{\theta}=0 \Leftarrow \boxed{J_\Delta.\ddot{\theta}+C.\theta=0}$ المعادلة التفاضلية للحركة. $\omega_o{}^2=\frac{C}{J_\Delta}$

الحل هو كمايلي : $\theta=\theta_m\cos(\omega_o.t+\varphi)$

إذن الطاقة الميكانيكية : $E_m=\frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}.C.\theta^2$

بتعويض θ و $\dot{\theta}$ و $\omega_o{}^2=\frac{C}{J_\Delta}$ في العلاقة أعلاه ، نحصل على : $\boxed{E_m=\frac{1}{2}.C.\dot{\theta}_m{}^2=C^{te}}$

يمكن تمثيل $E_{pt}=\frac{1}{2}.C.\theta^2$ هو عبا رة عن منحنى شلجمي .



4-الدراسة الطاقية لنواس وازن:

1-4-الطاقة الميكانيكية:

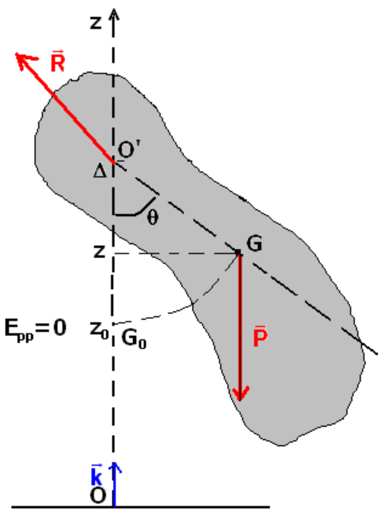
نعتبر المجموعة النواس الوازن {الحامل ـ الجسم S } بحيث أن J_Δ عزم قصور الجسم S ونمعلن حركة مركز قصوره بالأفصول الزاوي θ عند كل لحظة t بالنسبة لمعلم مرتبط بمرجع أرضي .

ـ الطاقة الحركية للمجموعة : يتوفر النواس الوازن على طاقة حركية في المرجع المرتبط بالأرض : $E_C=\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$

ـ طاقة الوضع الثقالية للمجموعة

تعبير طاقة الوضع الثقالية لنواس وازن في مجال الثقالة هو: $E_{pp}=mgz+cte$ حيث m كتلة الجسم S و z أنسوب مركز قصوره في المعلم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ متعامد وممنظم محوره $(O,\vec{k})$ رأسي وموجه نحو الأعلى ، و g شدة الثقالة .

الثابتة cte تحدد انطلاقا من الحالة المرجعية .



ـ الطاقة الميكانيكية للنواس الوازن. $E_m=E_C+E_{pp}$

تعبير الطاقة الميكانيكية لنواس وازن في معلم مرتبط بمرجع أرضي هو :

$$E_m=mgz+\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2+cte$$

مثال :

حسب الشكل : $z = z_0 + h$ بحيث أن

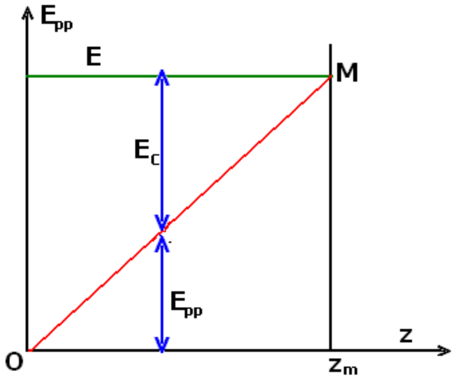
$O'G = d$ نضع $h = O'G - O'G\cos\theta$

$z = z_0 + d\left(1-\cos\theta\right)$

يمكن تحديد الثابتة cte انطلاقا من الحالة المرجعية :

$cte = -mgz_0$ أي أن $z = z_0$ عند $E_{pp} = 0$

$$E_m = mgd\,(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$$



$$\frac{dE_m}{dt} = mg\dot{\theta}\sin\theta + J_\Delta\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$$= \dot{\theta}\left(mgd\sin\theta + J_\Delta\ddot{\theta}\right) = 0$$

$$E_m = cte$$

في غياب للاحتكاكات تبقى الطاقة الميكانيكية للنواس الوازن في مجال الثقالة ثابتة . **إذن النواس الوازن مجموعة محافظيه**

2-4-مخططات الطاقة:

أ ــ الحالة العامة

* التمثيل المبياني لتغيرات طاقة الوضع الثقالية بدلالة الأنسوب z .

$$E_{pp} = mgz$$

$$E_m = g(z) = cte$$

$$E_m - E_{pp} = E_c$$

الطاقة الحركية إما موجبة أو منعدمة.

في النقطة M $E_{pp} = mgz_M$ و $E_C = 0$

$$E_m = E_{pp} = mgz_M$$

أي أن z لايمكنها أن تتجاوز z_M يعني أن $z < z_M$

في النقطة O : $E_{pp} = 0$ و $E_C = E_m = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$

عندما تزداد z تنقص الطاقة الحركية E_C فتزداد طاقة الوضع E_{pp} إلى أن تصبح $z = z_m$ فيتوقف الجسم أي أن $E_C = 0$

ب ــ حالة النواس الوازن

ــ طاقة الوضع الثقالية للنواس الوازن نختار كحالة مرجعية $E_{pp} = 0$ بالنسبة z=z$_0$ في هذه الحالة

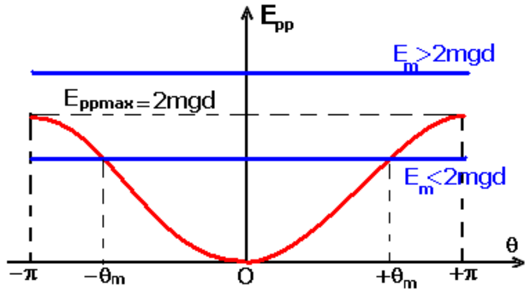
$$E_{pp} = mgd\left(1-\cos\theta\right)$$

ـ مخططات الطاقة

$E_m = E_{pp} + E_C$ الطاقة الميكانيكية وهي ثابتة بالنسبة للنواس الوازن

$E_{pp} = mgd(1-\cos\theta)$ طاقة الوضع الثقالية $E_{pp} = f(\theta)$

حساب تغيرات $E_{pp}(\theta)$



$$\frac{dE}{d\theta} = mgd\,\dot{\theta}\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0$$

$\theta=\pi$ أو $\theta=-\pi$

$-\pi\le\theta\le\pi$

$0\le E_{pp}\le 2mgd$

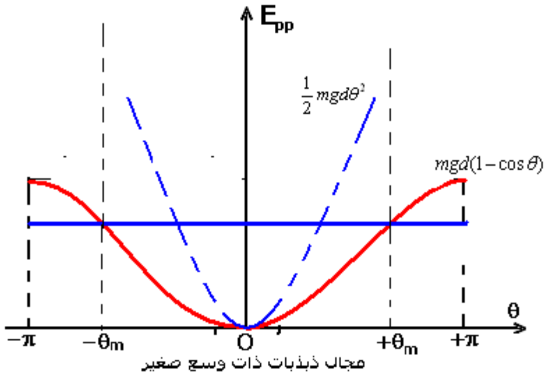
ــالحالة الأولى:

$E_C>0$ أي أن $E_m=E_{pp}+E_C$ و $E_m>2mgd$

وبالتالي فالنواس الوازن لايتوقف ويمكنه ان يدور حول المحور (Δ)

ــ الحالة الثانية :

$E_m<2mgd$ أي أن $E_C=E_m-E_{pp}$ وبما أن $E_C\ge 0$ في هذه الحالة تنعدم الطاقة الحركية للنواس الوازن بالنسبة لقيمتين θ_m و $-\theta_m$ في هذه الحالة للمجموعة حركة تذبذبية حرة وغير مغمدة تتحول خلالها الطاقة الحركية إلى طاقة وضع ثقالية $\Delta E_C=-\Delta E_{pp}$.



في حالة ذبذبات ذات وسع صغير $\sin\theta\approx\theta$ $\sin\theta\cong\theta$ و

$$\cos\theta\cong 1-\frac{\theta^2}{2}$$

$$E_P=mgd\left(1-1+\frac{\theta^2}{2}\right)=mgd\frac{\theta^2}{2}$$