

**I. Racine carrée d'un nombre positif.****1) Définition.**

Exemples :  $3^2 = 9$  donc  $\sqrt{9} = 3$   
 $2,6^2 = 6,76$  donc  $\sqrt{6,76} = 2,6$

**La racine carrée du nombre  $a$  est le nombre (toujours positif) dont le carré est  $a$ .**

Remarque :

Effectuer avec la calculatrice :  $\sqrt{-5}$  Que remarque-t-on ?

La racine carrée de -5 est le nombre dont le carré est -5.

Un nombre au carré est toujours positif (règle des signes), donc la racine carrée d'un nombre négatif est impossible.

$\sqrt{-5}$  N'existe pas !

**2) Racines carrées « parfaites ».**

$\sqrt{4} = 2$  ;  $\sqrt{9} = 3$  ;  $\sqrt{16} = 4$  ;  $\sqrt{25} = 5$  ;  $\sqrt{36} = 6$  ;  $\sqrt{49} = 7$  ;  $\sqrt{64} = 8$  ;  $\sqrt{81} = 9$  ;  $\sqrt{100} = 10$

**3) Racine carrée d'un nombre au carré.**

Exemples :

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{9^2} = \sqrt{81} = 9$$

**Pour un nombre positif  $a$ ,  $\sqrt{a^2} = a$**

La racine « annule » le carré.

**II. Opérations sur les racines carrées.****1) Activité.**

| $a$ | $b$ | $\sqrt{a}$ | $\sqrt{b}$ | $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ | $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ | $\sqrt{a \times b}$ | $\sqrt{\frac{a}{b}}$ |
|-----|-----|------------|------------|----------------------------|-----------------------------|---------------------|----------------------|
| 9   | 16  | 3          | 4          | 12                         | $\frac{3}{4}$               | 12                  | $\frac{3}{4}$        |
| 25  | 4   | 5          | 2          | 10                         | $\frac{5}{2}$               | 10                  | $\frac{5}{2}$        |
| 49  | 9   | 7          | 3          | 21                         | $\frac{7}{3}$               | 21                  | $\frac{7}{3}$        |

**2) Formules.**

$a$  et  $b$  désignent deux nombres positifs.

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

**Attention :**

Les « non-formules » :  $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$  et  $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

**Exemple :**  $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$  et  $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$

### 3) Carré d'une racine carrée.

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{a^2} = a$$

**Pour un nombre positif  $a$ ,  $(\sqrt{a})^2 = a$**

**Le carré « annule » la racine.**

**Exemples :**

$$(\sqrt{7})^2 = 7$$

$$(\sqrt{14})^2 = 14$$

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

### 4) Applications.

Ecrire le plus simplement possible :

$$A = \sqrt{32} \times \sqrt{2} = \sqrt{32 \times 2} = \sqrt{64} = 8$$

$$B = \sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$$

$$C = \sqrt{3} \times \sqrt{36} \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{36} = \sqrt{9} \times \sqrt{36} = 3 \times 6 = 18$$

$$D = \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{98}{2}} = \sqrt{49} = 7$$

$$E = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{72}} = \sqrt{\frac{50}{72}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$$

$$F = (4\sqrt{5})^2 = 4\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} = 4 \times 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 16 \times 5 = 80$$

$$G = \frac{\sqrt{32} \times \sqrt{10}}{\sqrt{80}} = \frac{\sqrt{32 \times 10}}{\sqrt{80}} = \frac{\sqrt{320}}{\sqrt{80}} = \sqrt{\frac{320}{80}} = \sqrt{4} = 2$$

### 5) Extraire une racine « parfaite ».

Ecrire sous la forme  $a\sqrt{b}$ , avec  $a$  et  $b$  entiers et  $b$  étant le plus petit possible :

$$A = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$B = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$C = 3\sqrt{125} = 3\sqrt{25 \times 5} = 3 \times \sqrt{25} \times \sqrt{5} = 3 \times 5 \times \sqrt{5} = 15\sqrt{5}$$

**Remarque :**

Pour que  $b$  soit le plus petit possible,  $b$  ne doit pas contenir de carré parfait.

### III. Sommes et différences de racines carrées.

Rappel :  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$  ou  $\sqrt{6} - \sqrt{2} \neq \sqrt{4}$  (non-formules !)

Comment simplifier des expressions contenant des sommes et des différences de racines carrées ?

**On regroupe les termes d'une même famille de racines carrées.**

**Les différentes familles de racines carrées sont :**

$\sqrt{2} ; \sqrt{3} ; \sqrt{5} ; \sqrt{6} ; \sqrt{7} ; \sqrt{10} ; \sqrt{11} ; \sqrt{13} ; \sqrt{14} ; \sqrt{15} ; \sqrt{17} ; \sqrt{19} \dots$

### Application 1 :

Ecrire le plus simplement possible :

$$A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

$$B = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - \sqrt{5} = 15\sqrt{2} - 4\sqrt{5}$$

$$C = (3 - 2\sqrt{3}) - (4 - 6\sqrt{3}) = 3 - 2\sqrt{3} - 4 + 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 1$$

### Application 2 :

Ecrire les expressions suivantes sous la forme  $a\sqrt{b}$ , où  $a$  et  $b$  sont des entiers et  $b$  le plus petit possible :  
On fait apparaître des racines carrées d'une même famille. Pour cela, il faut extraire des racines parfaites.

$$A = \sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$$

$$A = \sqrt{4 \times 3} + 7\sqrt{3} - \sqrt{9 \times 3}$$

$$A = \sqrt{4} \times \sqrt{3} + 7\sqrt{3} - \sqrt{9} \times \sqrt{3}$$

$$A = 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$$

$$A = 6\sqrt{3}$$

$$B = \sqrt{125} - 2\sqrt{20} + 6\sqrt{80}$$

$$B = \sqrt{25 \times 5} - 2\sqrt{4 \times 5} + 6\sqrt{16 \times 5}$$

$$B = \sqrt{25} \times \sqrt{5} - 2\sqrt{4} \times \sqrt{5} + 6\sqrt{16} \times \sqrt{5}$$

$$B = 5\sqrt{5} - 2 \times 2 \times \sqrt{5} + 6 \times 4 \times \sqrt{5}$$

$$B = 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 24\sqrt{5}$$

$$B = 25\sqrt{5}$$

### IV- Racines carrées et développements.

Ecrire les expressions suivantes sous la forme  $a + b\sqrt{c}$ , où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des entiers relatifs :

$$A = (\sqrt{3} - 4)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 4 + 4^2 = 3 - 8\sqrt{3} + 16 = 19 - 8\sqrt{3}$$

$$B = (3 + \sqrt{5})^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 9 + 6\sqrt{5} + 5 = 14 + 6\sqrt{5}$$

$$C = (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{5}) = (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2 = 2 - 5 = -3$$

$$D = (3 + \sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3}) = 12 - 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 12 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{9} = 12 - 2\sqrt{3} - 2 \times 3 = 12 - 2\sqrt{3} - 6 = 6 - 2\sqrt{3}$$

Rendre entier le dénominateur d'un quotient.

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} \times (1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5}) \times (1 - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5} - (\sqrt{5})^2}{1^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{5} - 5}{1 - 5} = \frac{\sqrt{5} - 5}{-4} = \frac{\sqrt{5} - 5}{4} = \frac{-(\sqrt{5} - 5)}{4} = \frac{5 - \sqrt{5}}{4}$$

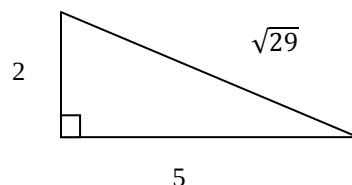
$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{7}}{5 - \sqrt{8}} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{7}) \times (5 + \sqrt{8})}{(5 - \sqrt{8}) \times (5 + \sqrt{8})} = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{16} - 5\sqrt{7} - \sqrt{56}}{5^2 - (\sqrt{8})^2} = \frac{5\sqrt{2} + 4 - 5\sqrt{7} - \sqrt{4 \times 14}}{25 - 8} = \frac{4 + 5\sqrt{2} - 5\sqrt{7} - 2\sqrt{14}}{17}$$

### V- Interprétation géométrique.

On dispose pour seuls instruments d'une règle graduée et d'une équerre.

Comment construire un segment qui mesure exactement  $\sqrt{29}$  cm ?

Expliquer la méthode employée.



## VI- Les différents types de nombres.

### 1) Les nombres entiers naturels.

Les nombres entiers naturels sont les nombres 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ....

### 2) Les nombres entiers relatifs.

Les nombres entiers relatifs sont les nombres entiers positifs et nombres entiers négatifs.

Exemples : -125 ; -9 ; 0 et 37 sont des nombres entiers relatifs.

### 3) Les nombres décimaux.

Un nombre décimal est le quotient d'un nombre entier relatif par une puissance de 10.

La partie décimale de son écriture décimale s'écrit avec un nombre fini de chiffres non nuls.

Exemples :  $0,8 = \frac{8}{10}$  et  $-4,78 = \frac{-478}{100}$  sont des nombres décimaux.

Remarque :  $\frac{1}{3} \approx 0,3333.....$  n'est pas un nombre décimal.

### 4) Les nombres rationnels.

Un nombre rationnel est le quotient d'un nombre entier relatif par un entier relatif non nul.

Exemples :  $\frac{1}{2}$  ;  $\frac{-3}{4}$  et  $\frac{2}{-3}$  sont des nombres rationnels.

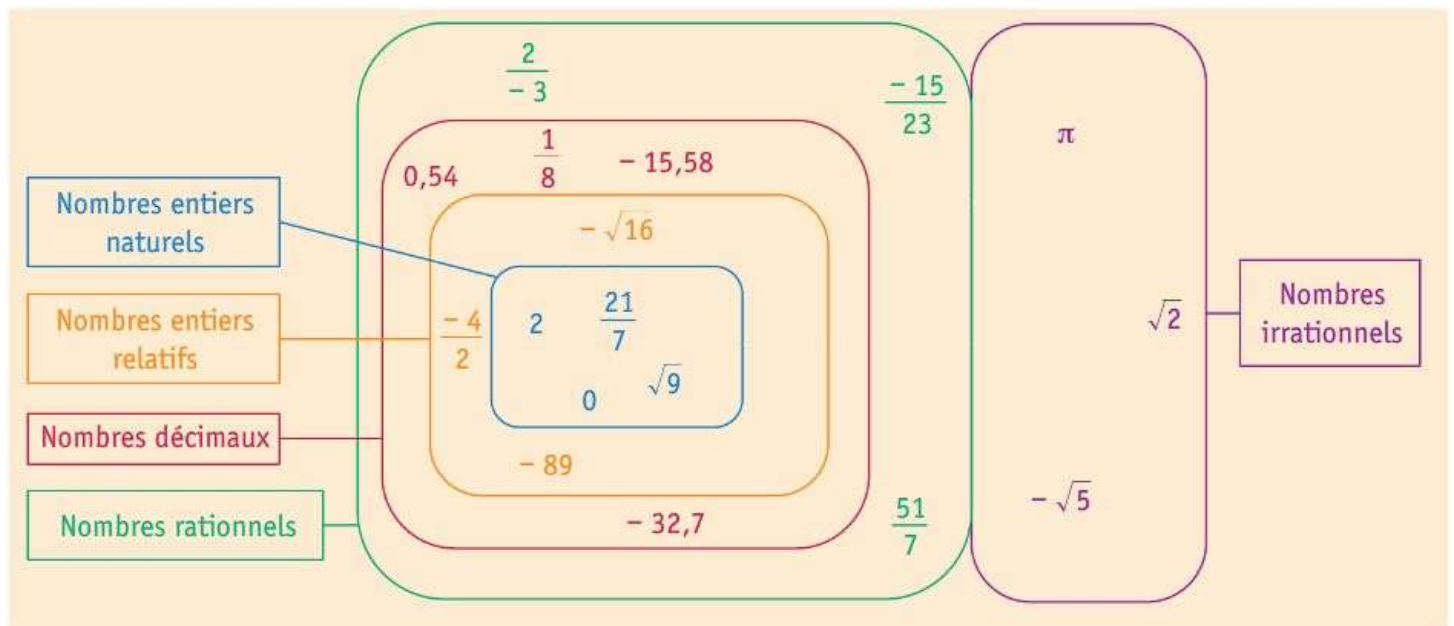
### 5) Les nombres irrationnels.

Un nombre irrationnel est un nombre qui n'est pas rationnel.

Exemple :  $\pi$  et  $\sqrt{2}$  sont des nombres irrationnels.

#### Propriétés :

- Un nombre entier naturel est aussi un nombre entier relatif, un nombre décimal et un nombre rationnel.
- Un nombre décimal est aussi un nombre rationnel.



#### Remarque :

Tous les nombres entiers sont décimaux, tous les nombres décimaux sont rationnels, et tous les nombres rationnels sont des réels.

Les ensembles de nombres sont emboîtés comme des poupées russes.

