DEVOIR SURVEILLÉ N°2

Durée de l'épreuve : 2h00

L'usage de la calculatrice est autorisé

L'énoncé de ce devoir comporte 4 pages

- *Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les initiatives que vous êtes amenées à prendre.*
- *Le barème tiendra compte des commentaires physiques ainsi que des qualités de rédaction.*
- *La numérotation des exercices doit être respectée. Les résultats doivent être systématiquement encadrés.*

Problème 1 : Le retour de la corde de Melde…

1. Phénomène d'ondes stationnaires

On considère une corde horizontale fixée à ses deux extrémités.

On l'écarte localement de sa position d'équilibre puis on la laisse évoluer librement.

Une onde stationnaire apparaît alors, pour laquelle on cherche une expression de la forme :

$$y(x,t)=2A\cos(\omega t+\varphi)\cos(kx+\psi)$$

1.1. Montrer que la superposition dans tout l'espace de deux ondes progressives sinusoïdales synchrones, de même amplitude A et se propageant en sens inverse donnent naissance à une telle onde stationnaire.

On rappelle que : $\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

1.2. Préciser la signification des constantes A, ω, k, φ, ψ.

1.3. Expliquer physiquement l'existence d'une telle onde stationnaire.

2. Étude des modes propres de vibration

2.1. Traduire mathématiquement le fait que la corde de guitare est fixée à ses deux extrémités $x = 0$ et $x = L$.

2.2. Montrer alors que ω ne peut prendre qu'une série de valeurs discrètes ω_n, dites pulsations propres, avec n entier strictement positif. Exprimer ω_n en fonction de L, n et c.

2.3. Exprimer les fréquences propres f_n en fonction de L, n et c.

A chaque valeur de n correspond un mode propre de vibration.

Le mode $n = 1$ est appelé mode fondamental.

Les modes correspondant à n supérieur à 1 sont les harmoniques de rang n.

2.4. Exprimer la déformation $y_n(x,t)$ correspondant à l'harmonique de rang n, en fonction de son amplitude A_n, de la phase à l'origine du cosinus à variation temporelle φ_n, de la pulsation ω_1 du fondamental, ainsi que de x, L, n et t.
2.5. Donner les positions des ventres et des nœuds de vibration dans le mode de rang n.
Combien de nœuds et de ventres comporte ce mode de vibration ?
2.6. Donner l'allure de la corde dans les modes de vibration correspondant au fondamental et aux deux premiers harmoniques.
Donner leur longueur d'onde respective et préciser la position des nœuds et des ventres.

3. Expérience de la corde de Melde

L'expérience de Melde est une expérience scientifique réalisée par le physicien allemand Franz Melde sur les ondes stationnaires produites sur une corde tendue reliée à un vibreur électrique.

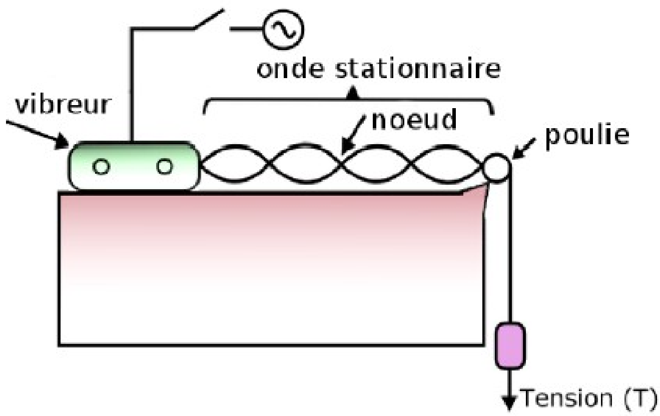


Figure 1 – Schéma du montage

Celui-ci impose un déplacement vertical de l'extrémité gauche de la corde $y(t)=y_0\sin(\omega t)$, où ω est la pulsation du vibreur et y_0 son amplitude. L'extrémité droite est fixée.
On appelle $y(x,t)$ la hauteur de la corde par rapport à l'horizontale en x à l'instant t.

3.1. Quelles conditions aux limites obtient-on en $x = 0$ et $x = L$?

Dans cette partie, on supposera (pour des raisons de simplicité!!) que l'onde stationnaire est de la forme :

$$y(x,t)=A\sin(\omega t+\varphi)\sin(kx+\psi)$$

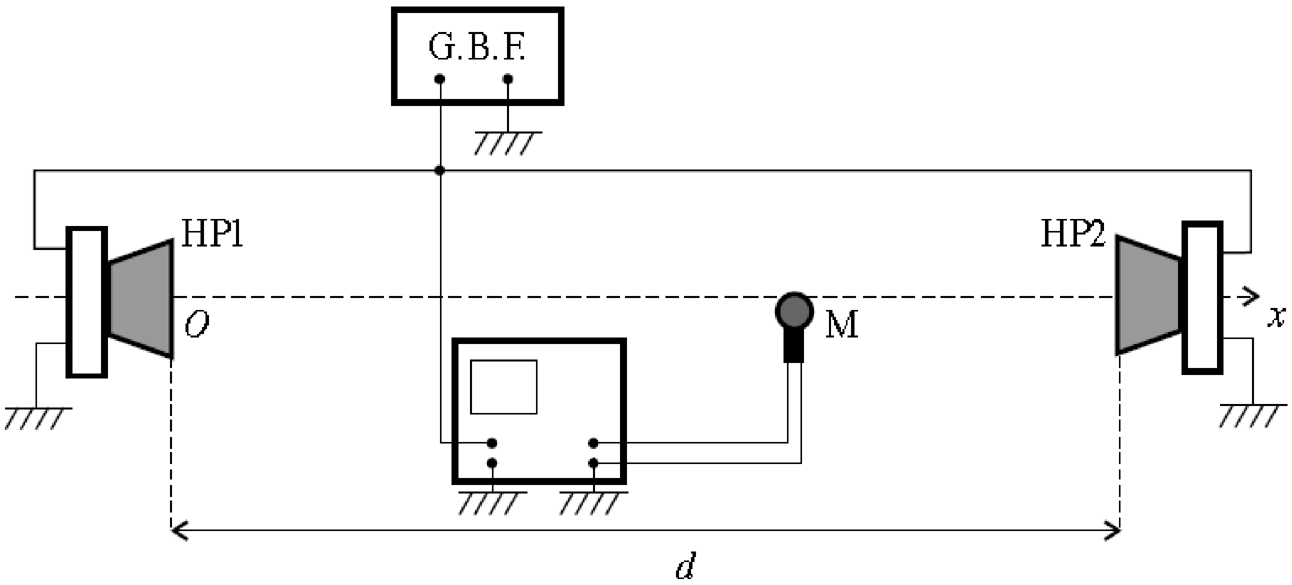
où A, ω, k, φ et ψ sont des constantes et c est la vitesse de propagation de l'onde.

3.2. Trouver les valeurs des constantes A, φ et ψ.
3.3. Pour quelles valeurs de k l'amplitude de la vibration devient-elle très grande ?
Déterminer une nouvelle expression des modes propres de vibration.
3.4. Dans quels cas l'amplitude de l'onde stationnaire diverge-t-elle ? Est-ce le cas expérimentalement ?

<u>Problème 2</u> : Expériences avec les ondes sonores

On s'intéresse à la superposition d'ondes sonores produites par deux haut-parleurs identiques, HP1 et HP2, placés face à face, à distance d l'un de l'autre, et alimentés par la même tension sinusoïdale de fréquence $f = 1250\ Hz$.

L'axe (Ox) passe par les centres des haut-parleurs, le centre de HP1 est en $x = 0$ et le centre de HP2 en $x = d$. Un microphone M de petite dimension peut être déplacé le long de l'axe (Ox).



<u>Figure 2</u> – Schéma du montage

On envoie sur un oscilloscope le signal du générateur alimentant les haut-parleurs et la tension u délivrée par le micro, le premier signal servant de source de déclenchement.

<u>Première expérience</u>

Lorsqu'on déplace le micro autour de la position médiane entre le haut-parleur, soit en $x = \frac{d}{2}$, on observe que l'amplitude de la tension u varie et passe successivement par des maxima et minima quasiment nuls, l'écart entre deux positions successives pour lesquelles l'amplitude est minimale étant constant et valant : $e = 13{,}8\ cm$

1.1. Quel phénomène physique ces observations vous évoquent-elles ? Justifier.

Pour modéliser la situation on suppose que les surpressions acoustiques $p_1(x,t)$ et $p_2(x,t)$ ont des amplitudes constantes le long de l'axe (Ox), toutes les deux égales à P_0, et qu'elles ont toutes les deux la même phase à l'origine des temps φ.

Ainsi le Haut-parleur 1 situé en $x = 0$ émet une onde sinusoïdale se propageant selon les valeurs croissantes de x avec une célérité c constante telle que : $p_1(x=0,t) = P_0 \cos(2\pi f t + \varphi)$.

1.2. Déterminer l'expression de la surpression acoustique $p_1(x,t)$ captée par le micro situé à l'abscisse x. Exprimer la surpression $p_1(x,t)$ en fonction de P_0, f, c, φ, x et t.

1.3. En adoptant le même raisonnement, montrer soigneusement que la surpression acoustique $p_2(x,t)$ s'écrit :

$$p_2(x,t)=P_0\cos(2\pi f t-2\pi f\frac{d}{c}+2\pi f\frac{x}{c}+\varphi)$$

On rappelle pour cela que le Haut-parleur 2 est situé en x = d.

1.4. Obtenir une expression de la surpression $p(x,t)$ résultant de la superposition de ces deux ondes qui explique les observations expérimentales.

Commenter la structure de l'onde résultante obtenue.

1.5. Proposer un protocole expérimental permettant de mesurer la longueur d'onde dans ce dispositif**.**

En déduire la célérité de l'onde sonore dans les conditions de l'expérience. Commenter le résultat obtenu.

Deuxième expérience

Lorsqu'on éloigne le micro de la position médiane entre les haut-parleurs les observations sont différentes : l'amplitude de la tension *u* augmente et diminue périodiquement mais ne passe plus par zéro. On remarque également que l'amplitude de l'onde émise par le haut-parleur diminue lorsqu'on s'en éloigne.

2.1. Quel phénomène ces observations vous évoquent-elles ? Justifier.

2.2. Expliquer pourquoi on ne peut plus faire l'hypothèse que les ondes venant des deux haut-parleurs ont la même amplitude.

2.3. Exprimer le déphasage $\Delta\Phi(x)$ perçu au point M d'abscisse *x*, entre l'onde issu du HP2 et celle issue du HP1, en fonction de *d*, *c*, *f* et *x*.

Exprimer pour cela le décalage temporel entre les deux ondes au point M d'abscisse x.

2.4. En appelant A_1 et A_2 leurs amplitudes, retrouver l'expression de l'amplitude *A(x)* de l'onde résultante en vous appuyant sur une représentation de Fresnel.

2.5(*). Montrer que si on approche le micro près du haut-parleur 1, l'amplitude *A(x)* s'écrit :

$$A(x)\approx A_1+A_2\cos\Delta\phi(x)$$

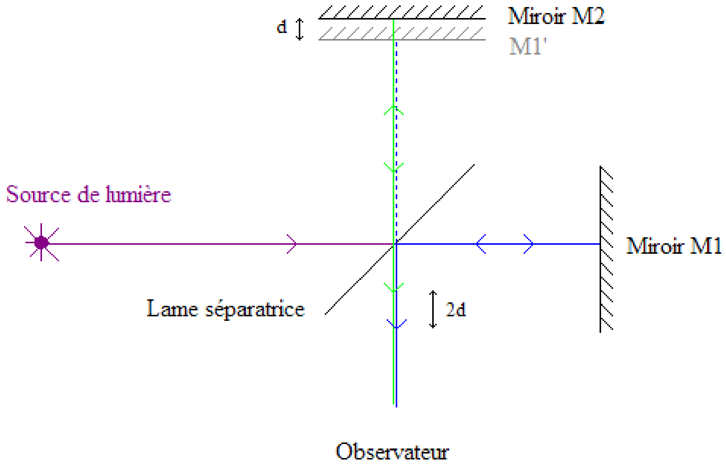
Données : $\sqrt{1+\varepsilon}\approx 1+\frac{1}{2}\varepsilon$ pour ε << 1

<u>Problème 2*</u> : Étude des interférences lumineuses

Dans ce problème, je vous propose d'étudier les phénomènes d'interférences d'ondes lumineuses au travers d'un interféromètre de Michelson.

1. Étude des interférences en lumière monochromatique

On utilise pour cela un dispositif appelé interféromètre de Michelson.
Un faisceau de lumière monochromatique, c'est-à-dire possédant une seule et unique fréquence f_0 dans son spectre est braqué vers un miroir diviseur d'amplitude, séparant le faisceau en deux faisceaux de même amplitude.



<u>Figure 3</u> : Interféromètre de Michelson

Par un jeu de miroirs et de lentilles, ces deux faisceaux sont dirigés vers un écran où ils interférent.
Dans le dispositif appelé « dispositif du coin d'air », l'écran plan est muni d'un repère *(Oxy)* et on démontre que le déphasage des deux faisceaux arrivant en un point *M(x,y)* de l'écran ne dépend que de *x* :

$$\Delta\phi(M)=\varphi_2(M)-\varphi_1(M)=4\pi\gamma\alpha\frac{x}{\lambda}$$

où γ est un coefficient de grandissement sans dimension, α est un très petit angle (l'angle du coin d'air) exprimé en radian et λ la longueur d'onde dans l'air (assimilé au vide) de la lumière monochromatique.

L'onde lumineuse observée en M est la superposition des ondes sinusoïdales empruntant les deux chemins, de même amplitude *C*, de même fréquence f_0, de phases respectives $\varphi_1(M)$ et $\varphi_2(M)$.

1.1. Après avoir rappelé l'expression des deux signaux sinusoïdaux, montrer que le signal résultant se met sous la forme :

$$s(x,t)=K(x)\cos(2\pi f_0 t+\frac{\varphi_1(M)+\varphi_2(M)}{2})$$

Donner l'expression de l'amplitude du signal résultant *K(x)* en fonction de *C*, γ, α, λ et *x*.

L'éclairement *E(x)* (la grandeur que l'œil peut apprécier) est proportionnel au carré de l'amplitude du signal résultant : $E(x)=\beta K^2(x)$ où β est le coefficient de proportionnalité.

1.2. Montrer que l'éclairement reçu en un point *M(x,y)* de l'écran s'exprime en fonction du déphasage des deux faisceaux arrivant en un point *M(x,y)* de l'écran :

$$E(x)=2\beta C^2(1+\cos\Delta\phi(M))$$

On rappelle que : $\cos^2 x=\frac{1+\cos(2x)}{2}$

1.3. Déterminer les valeurs de *x* pour lesquelles l'éclairement *E(x)* est maximal puis nul.
À quelles valeurs de *ΔΦ(M)* ces situations correspondent-elles ? À quels types d'interférences ?
1.4. Tracer l'allure de *E(x)* et préciser sa période spatiale X.
1.5. On donne α = 0,15 mrad, γ = 4, λ = 589 nm. Décrire la figure observée sur l'écran.

2. Observation des battements optiques

On remplace la source précédente par une lampe spectrale à vapeur de sodium de une lumière jaune orangée.
Son spectre possède la particularité de posséder un doublet jaune, c'est-à-dire qu'il existe deux signaux sinusoïdaux de même amplitude et de fréquences très voisines f_1 et f_2.

On éclaire l'interféromètre de Michelson en dispositif du coin d'air avec une lampe à vapeur de sodium filtrée de façon à ne conserver que le doublet jaune dont les longueurs d'onde dans le vide sont $\lambda_1=\frac{c}{f_1}$ et $\lambda_2=\frac{c}{f_2}$ inconnues. On pose : $f_m=\frac{f_1+f_2}{2}$ et $\delta f=f_2-f_1$

On place une cellule photovoltaïque assimilée à un capteur quadratique qui transforme le signal lumineux perçu en une tension électrique proportionnelle à l'éclairement détecté.
La cellule est fixe et on équipe l'interféromètre d'un dispositif qui revient à faire varier la valeur de *x* au point où se trouve la cellule selon la loi horaire $x=v.t$
On enregistre ainsi l'évolution de l'éclairement résultant en fonction de *x*.

2.1. On admet que l'éclairement reçu en un point *M(x,y)* de l'écran est la somme des deux éclairements E_1 et E_2 correspondant aux deux fréquences f_1 et f_2 : $E(x)=E_1(x)+E_2(x)$
Établir l'expression de l'éclairement en fonction du temps *t* sous la forme :

$$E(t)=4\beta C^2(1+s_e(t).s_p(t))$$

où $s_e(t)$ est une fonction enveloppe de période T_e et $s_p(t)$ est une fonction porteuse de période T_p telles que $T_p \ll T_e$

2.2. Justifier le fait que l'on parle de battements optiques.

2.3. On connaît la valeur de la fréquence moyenne du doublet jaune du sodium : f_m = 5,087.10^{14} Hz.

On mesure le rapport entre les périodes de l'enveloppe et de la porteuse : $\frac{T_e}{T_p} = 1963$

Déterminer les valeurs de f_1, f_2 et des longueurs d'onde dans le vide λ_1 et λ_2 en prenant c_0 = 2,99.10^8 m.s^{-1}

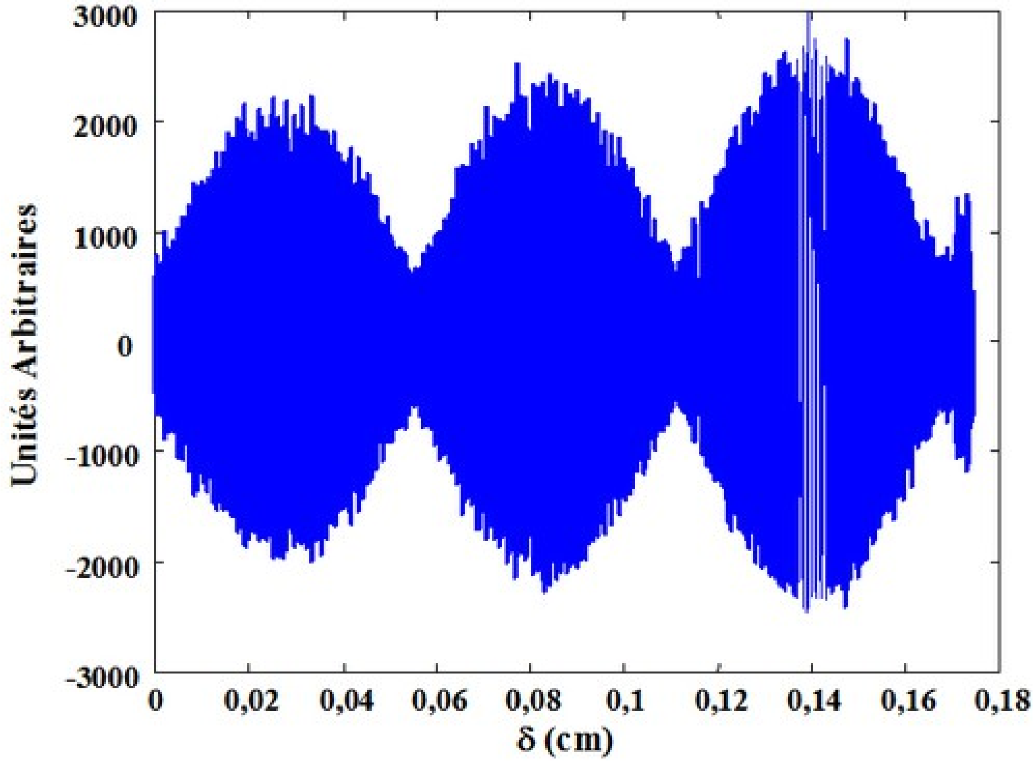


Figure 4 : Étude expérimentale des battements optiques