EXERCICES ET FORMULAIRE DE REVISION DU PROGRAMME DE MATH/TERMINALE S, POUR PREPARER LA RENTREE EN BCPST

Document téléchargeable sur: ***laurentgautret.sitew.fr***

SOMMAIRE:

Bonjour,

L'ensemble de nos documents de travail en Mathématiques et Informatique (Travail de pré-rentrée et formulaire de Math de revision de la TS, Cours, TD, TP, Devoirs, Corrigés…) se trouveront (et se trouvent déjà pour les 2 premiers) sur mon site web: **http://www.laurentgautret.sitew.fr**
L'enseignement des mathématiques en classe prépa est très différent du lycée. Plus pointu, plus exigeant, plus technique et rigoureux. Pour grimper sereinement le palier qui se dresse devant vous il est indispensable de se préparer, et ce au plus tard deux à trois semaines avant la rentrée.
Il s'agit de vérifier que vous êtes solidement assis sur vos bases de Terminale, en tout cas aussi bien que vos collégues des grands Lycées métropolitains. Mieux vaut ne pas hésiter sur les formules de l'exponentielle, sur un calcul de dérivée, sur une valeur de cosinus... sans quoi vous risquez d'être gêné durant toute l'année !
Pour vous aider à faire cette vérification, vous trouverez dans ce document :

1 Des exercices de pré-rentrée (partie I) : organisés en 9 thématiques, ils couvrent l'essentiel du programme de TS, et sont de difficulté croissante dans chaque thématique. Je vous demande de faire au moins 30 à 50% des exercices de ce document en n'hésitant pas à affronter les exercices qui vous posent problème, à l'aide si nécessaire des indications, exercice par exercice, fournies dans la partie III. Si vous êtes bloqué(e), pas de panique ! La plupart des thématiques seront revues au cours de l'année.
Début Août, je mettrai sur mon site des éléments de correction de ces exercices. Vous devrez alors lire les corrections des exercices sur lesquels vous aurez préalablement réfléchi, et préparer des questions sur les incompréhensions qui vous resteront.
Nous aurons à la rentrée des séances de TD dédiées pour répondre à vos questions.

2 Un formulaire de Math de revision de TS (partie II) : tout doit être su ! Dans le cas contraire, revoyez le(s) chapitre(s) mal compris en Terminale.

Vous trouverez le plan du cours du premier semestre de Mathématiques sur mon site (le polycopié vous sera fourni à la rentrée): vous n'avez donc aucun livre à acheter.

Bon courage à tous!

Partie I : Enoncés des Exercices

1 Équations - Inéquations

Exercice 1.1

Résoudre les équations suivantes sans calculer le discriminant :

1. $x^2 + 3x = 0$
2. $x^2 - 1 = 0$
3. $x^2 - 6x + 9 = 0$
4. $x^2 - 3x + 2 = 0$
5. $x^4 + 6x^2 + 9 = 0$
6. $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4 = 0$

Exercice 1.2

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(2x + 1)(x + 2) \leqslant 0$
2. $\dfrac{2x + 1}{x + 2} \leqslant 0$
3. $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4 > 0$
4. $|x - 9| \leqslant 2$
5. $\dfrac{x - 2}{x + 3} - \dfrac{x}{x - 1} \geqslant 0$
6. Résoudre $1 \leqslant x^2 \leqslant 2$ puis $1 \leqslant \sqrt{3x^2 - 2} \leqslant 2$

Exercice 1.3

L'objectif ici, est de savoir faire ces calculs correctement et **rapidement**, c'est pour cela qu'ils sont assez simples. Compléter ou résoudre l'équation ou inéquation :

1. $|-3x + 4| = 7$
2. $|-3x + 4| = |x + 1|$
3. $\left|\dfrac{1}{x} - 2\right| \leqslant 3$
4. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) =$
5. Résoudre sur $[0; 2\pi]$ puis sur $\mathbb{R}$: $\sin(x) > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
6. $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) =$
7. $\sqrt{3x + 1} - x > 0$
8. $\mathrm{e}^{3x} - 6\mathrm{e}^{2x} = 6 - 11\mathrm{e}^{x}$
9. $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) - 2\ln(x) = 0$

Exercice 1.4

Résoudre les équations et inéquations suivantes (on pensera aux formules de trigo !) :

1. $\cos(2x) + \cos(x) = -1.$
2. $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 0.$
3. $2\cos^2(x) + 3\cos(x) + 1 > 0.$
4. $\dfrac{2\sin^2(x) + 3\sin(x) + 1}{2\cos(x) - 1} \leqslant 0$

Exercice 1.5

Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}^2$ (utiliser des combinaisons linéaires d'équations).

✓ $(S_1)\begin{cases}(E_1)\ \ 2x+\ y=3\\(E_2)\ \ x\ -3y=8\end{cases}$

✓ $(S_2)\begin{cases}(E_1)\ \ 2ix+y(i+1)=5(i-1)\\(E_2)\ \ x-\quad 3y\quad =1-8i\end{cases}$

✓ $(S_3)\begin{cases}2x+y+z=3\\x-y+3z=8\\x+2y-z=-3\end{cases}$

2 Fonctions d'une variable réelle

Attention, pour tous les exercices de cette partie, l'usage de la calculatrice est interdit. De manière générale vous ne serez pas autorisé(e) à utiliser la calculatrice en cours de mathématiques.

Exercice 2.1

Soient x, a, b, c, d des réels strictement positifs. Cochez la réponse correcte :
Pour la définition de x^a avec $a \in \mathbb{R}$, vous pouvez consulter le résumé sur les fonctions usuelles p12.

1. On a $\ln(a+b) =$

   ☐ $\ln(a)\ln(b)$ ☐ $\ln(a)+\ln(b)$ ☐ $\ln(ab)$ ☐ rien de tout cela

2. On a $\ln(ab) =$ ☐ $\ln(a)\ln(b)$ ☐ $\ln(a)+\ln(b)$ ☐ $\ln(a+b)$ ☐ rien de tout cela

3. On a $\mathrm{e}^{a+b} =$ ☐ $\mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$ ☐ $\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b$ ☐ $(\mathrm{e}^a)^b$ ☐ rien de tout cela

4. On a $\sqrt{a+b} =$ ☐ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ☐ $\sqrt{a}\sqrt{b}$ ☐ rien de tout cela

5. On a $\sqrt{a}\sqrt{b} =$

   ☐ $\sqrt{ab}$ ☐ $(\sqrt{a})^{\sqrt{b}}$ ☐ rien de tout cela

6. On a $0^0 =$

   ☐ 1 ☐ 0 ☐ rien de tout cela

7. On a $(x^a)^b =$

   ☐ x^{a^b} ☐ x^{ab} ☐ $x^a x^b$ ☐ rien de tout cela

Exercice 2.2

Compléter :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} =$
2. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{x} =$
3. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln(x) =$
4. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(x)}{x} =$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x} =$
6. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^3\mathrm{e}^{x+2} =$
7. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} =$
8. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{x} =$

Exercice 2.3

Soit la fonction f définie par $x \mapsto \dfrac{|2x+2|}{x+2}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Montrer que la courbe de f admet des droites asymptotes en $+\infty$,en $-\infty$ et en -2 et donner leur équation.
3. Donner l'expression de $f(x)$ sur les intervalles $]-\infty;-1]$ et sur $]-1;+\infty[$ puis étudier les variations de f.

Exercice 2.4

Etudier les variations et représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

Exercice 2.5

Déterminer le domaine de définition et étudier les variations de la fonction et les limites aux bornes du domaine de définition pour les fonctions f définies pour une variable réelle par :

1. $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$
2. $f(x) = \ln\left(\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|\right)$
   Remarque. Le domaine de définition est-il le même que celui de la question précédente ?

À retenir. Pour une fonction u dérivable et qui ne s'annule pas, la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln|u(x)|$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, il n'y a pas à séparer les cas $u(x) > 0$ et $u(x) < 0$.
A contrario, pour calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto |u(x)|$ il faut séparer les cas.

Exercice 2.6

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.
Calculer $f'(x)$,$f''(x)$.
Conjecturer l'expression de la dérivée n-ième de f, et démontrer le résultat par récurrence.

Exercice 2.7

Déterminer le domaine de définition puis le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x(x^2 - 3x + 4)$ et dessiner son allure sur un graphe.

Exercice 2.8

Déterminer le domaine de définition, le tableau de variations et tracer l'allure des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$. On déterminera avec soin le domaine d'étude et on tracera le graphe sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
2. $g : x \mapsto \sqrt{9x^2 - 6x + 1}$.

Exercice 2.9

Dans chaque cas suivant, donner le domaine de définition de la fonction puis calculer sa dérivée en précisant sur quel ensemble la fonction est dérivable :

1. $f : x \mapsto \ln(2x+1)$
2. $h : x \mapsto \sin(\pi - 2x)$

Exercice 2.10

On pose $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de cette fonction appelée tangente. On le notera D.
2. Montrer que pour tout $x \in D$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.
3. Etudier les variations de la fonction sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ en précisant les limites aux bornes de l'intervalle puis tracer son graphe.
4. Déduire de la question précédente les variations et le graphe de la fonction sur $\left]\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right[$.
5. Résoudre graphiquement sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ puis par le calcul sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\tan(x) = \sqrt{3}$.
6. Résoudre graphiquement sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation suivante : $0 < \tan(x) \leqslant 1$.

3 Suites numériques - Raisonnement par récurrence

Exercice 3.1

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(2n+3)(2n+1)}{(n+1)^2}$

✓ Montrer que cette suite est majorée par 4.
✓ Etudier les variations de cette suite.
✓ Déterminer la limite de cette suite.

Exercice 3.2

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = 1 + \dfrac{sin(n)}{n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est à termes positifs.
2. Montrer que cette suite est bornée et qu'elle converge, calculer sa limite.

Exercice 3.3

Soit la suite (v_n) définie par : $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{3} + 1$. avec $v_0 = 1$. C'est une suite **arithmético géométrique**.

1. Déterminer la solution réelle a de l'équation, $x = \dfrac{x}{3} + 1$.
2. Posons alors $u_n = v_n - a$.
   Montrer que (u_n) est alors une suite géométrique, préciser sa raison et le premier terme.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
4. Qu'elle est la limite de la suite (v_n) ?

Remarque. Dans les exercices suivants (et de manière générale), on utilise la notation « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ » qui représente la somme pour l'indice k entier variant de 1 à n des $f(k)$, ainsi on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{5} \sin(k+n) = \sin(2+n) + \sin(3+n) + \sin(4+n) + \sin(5+n)$$

Exercice 3.4

Montrer par récurrence que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \dfrac{(n^2)(n+1)^2}{4}$.

Exercice 3.5

Considérons la suite (u_n) définie par :$u_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2}$.

1. Montrer par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} k$ est égale à : $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. En déduire une simplification de u_n.
3. Etudier la convergence de cette suite.

Exercice 3.6

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 3$ et $u_0 = 2$
On définit une nouvelle suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + 6$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4 Trigonométrie

Exercice 4.1

Utiliser le cercle trigonométrique pour retrouver toutes les relations du type $\sin(\pi - x) =$ et les propriétés de parité et de périodicité des fonctions sinus et cosinus

Exercice 4.2

1. Développer $\cos(a - b)$.
2. Développer $\cos(a + b)$.
3. En déduire la transformation en somme de cosinus de $\cos(a)\cos(b)$. (l'objectif est de retrouver la formule énoncée dans le cours)
4. De même, déterminer la transformation en somme de cosinus de $\sin(a)\sin(b)$.
5. Déterminer la transformation en somme de $\sin(a)\cos(b)$.

Exercice 4.3

Toutes les formules de trigonométrie sont à savoir parfaitement, pour vous aider à tester si vous les avez bien apprises, compléter le formulaire suivant :

1. $\sin(a) + \sin(b) =$
2. $\cos(2a) =$ donner 3 formes différentes
3. $\sin(a - b) =$
4. $\cos(a - b) =$
5. $\cos(a)\sin(b) =$

Exercice 4.4

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.
En déduire une égalité du même type pour $\sin(3x)$.

Exercice 4.5

Toutes les formules de trigonométrie sont à savoir parfaitement, pour vous aider à tester si vous les avez bien apprises, compléter le formulaire suivant :

1. $\sin(2a) =$
2. $\tan(2a) =$
3. $\cos(a+b) =$
4. $\tan(a+b) =$
5. $\cos(a)\cos(b) =$
6. $\sin^2(a) =$ en fonction de $\cos(2a)$
7. $\sin(a)+\sin(b) =$ (transformation en produit)

5 Calcul intégral - Calcul de primitives

Exercice 5.1

Calculer les intégrales suivantes :

✓ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx$

✓ $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$

✓ $\displaystyle\int_{0,5}^1 \frac{\ln(t)}{t}dt$

✓ $\displaystyle\int_0^1 e^{3u}du$

✓ $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{2}{3x-1}dx$

Exercice 5.2

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{(3x+1)^2}$
3. $f_3(x) = \cos^2(x)$
4. $f_4(x) = \sin(4x)\cos(3x)$

Remarque. Pour les questions 3. et 4. on pourra utiliser les formules de trigonométrie pour transformer les expressions en somme.

6 Nombres complexes

Exercice 6.1

Calculer le module et l'argument principal des nombres complexes suivants.

$$a = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad b = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad a^3, \quad ab, \quad a+b, \quad \frac{a}{b}$$

Exercice 6.2

Déterminer r et θ réels tels que : $re^{i\theta} = 1+i$.
Même question avec $re^{i\theta} = 1-i$

Exercice 6.3

Soient $Z = 2+2i$ et $Z' = 1+i\sqrt{3}$.

1. Ecrire Z et Z' sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de $\dfrac{Z}{Z'}$ .Calculer Z'^3.

Exercice 6.4

Pour z différent de $-i$, on définit $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$.
Calculer $f(1+i)$,$f(e^{i\pi})$,$f(1+i\sqrt{3})$
Déterminer les nombres complexes z tels que $f(z) = 2$.

7 Calcul algébrique

Exercice 7.1

Simplifier : $\dfrac{1+\frac{x+1}{x+3}}{x+4}$

Exercice 7.2

Simplifier l'expression :$\dfrac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+z\frac{x+y}{1+xy}}$

Exercice 7.3

Simplifier :$(a+b+c)^2 + (-a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2$

Exercice 7.4

Exprimer sans racines carrées :$\sqrt{1+\sin(2y)} + \sqrt{1-\sin(2y)}$
Simplifier l'expression quand $y \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

8 Géométrie

Exercice 8.1

Soient $A(1,2,3)$, $B(2,0,-2)$, $C(a,0,-2)$ trois points de $\mathbb{R}^3$.

1. En utilisant le produit scalaire, exprimer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Calculer alors a pour qu'il en soit ainsi.
3. Qu'elles sont alors les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC ?

Exercice 8.2

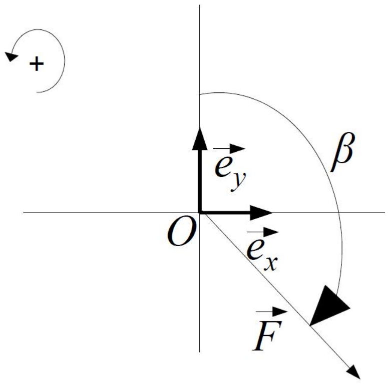
Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer l'équation du plan perpendiculaire à la droite de direction $\vec{u}(1,2,3)$ passant par le point $A(0,1,0)$.

Exercice 8.3

Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre $C(1,1,1)$ de rayon $R=3$.
Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à cette sphère passant par le point $A(0,3,3)$.

Exercice 8.4

Déterminer a et b tels que la force $\overrightarrow{F}$ puisse s'écrire sous la forme $\overrightarrow{F} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y$ dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ en fonction de β et de sa norme notée F. On pourra penser à utiliser le produit scalaire.



9 Probabilités

Un fabricant de berlingots possède trois machines A, B et C qui fournissent respectivement 10%, 40% et 50% de la production totale de son usine.
Une étude a montré que le pourcentage de berlingots défectueux est de 3,5% pour la machine A, de 1,5% pour la machine B et de 2,2% pour la machine C.
Après fabrication, les berlingots sont versés dans un bac commun aux trois machines.
On choisit au hasard un berlingot dans le bac.

1. Montrer que la probabilité que ce berlingot provienne de la machine C et soit défectueux est 0,011.

2. Calculer la probabilité que ce berlingot soit défectueux.

3. Caculer la probabilité que ce berlingot provienne de la machine C sachant qu'il est défectueux.

4. On prélève successivement dans le bac 10 berlingots en remettant à chaque fois le berlingot tiré dans le bac. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un berlingot défectueux parmi ces 10 prélèvements.

Partie II : Documents et Formulaires

Alphabet grec

Les lettres grecques sont employées très fréquemment en sciences, il faut donc les connaître afin d'éviter les mal-entendus lors des cours.

minuscule	majuscule	nom	minuscule	majuscule	nom
α		alpha	ν		nu
β		bêta	ξ	Ξ	xi ou ksi
γ	Γ	gamma	o		omicron
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ε		epsilon	ρ		rho
ζ		zêta	σ	Σ	sigma
ι		iota	τ		tau
κ		kappa	χ		chi (se dit « ki »)
λ	Λ	lambda		Ψ	psi
μ		mu	ω	Ω	omega

NOMBRES COMPLEXES

Forme algébrique $z = x + iy$.
Forme trigo $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$,
Forme exponentielle $z = \rho e^{i\theta}$.
$|z|$ est le *module* de z, et θ est *un argument* de z.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = z\overline{z}, \quad \text{et} \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \text{ (si } x \neq 0\text{)}.$$

Conjugué : $\overline{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$
Propriétés du module :

$$|\overline{z}| = |z|, \quad |1/z| = 1/|z|, \quad |zz'| = |z|.|z'|$$

Propriétés de l'argument :

$$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi], \quad \arg(1/z) = -\arg z \quad [2\pi], \quad \arg(\overline{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$$

Résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$.
On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

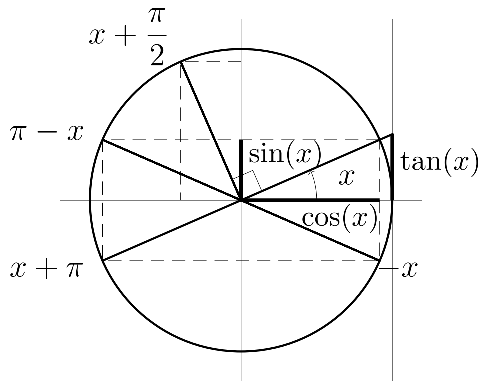
- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles $z = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$,
- si $\Delta = 0$, une solution $z = \frac{-b}{2a}$,
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes $z = \frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exponentielle complexe $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

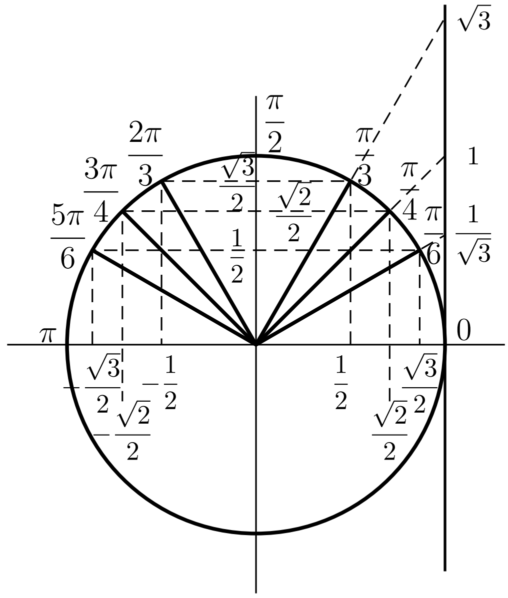
Formule de Moivre $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Trigonométrie



tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\sin(x+\pi) = -\sin(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$	$\cos(x+\pi) = -\cos(x)$
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
$\tan(-x) = -\tan(x)$	$\tan(x+\pi) = \tan(x)$
$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$	$\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{\tan(x)}$



Formules à connaître par cœur.

✓ $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

✓ $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

✓ **Formules d'addition :**

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

✓ **Angle double (a=b) :**

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

Formules à connaître ou savoir retrouver.

✓ **Linéarisation :** *(se déduisent de* $\cos(2a)\ldots$ *)*

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

✓ **Transformation de produit en somme :** *(se déduisent des formules d'addition)*

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\big)$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\sin(a-b) + \sin(a+b)\big)$$

✓ **Transformation de somme en produit :** *(se déduisent des formules d'addition)*

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

✓ **Transformation en fraction rationnelle :** *(se déduisent de* $\tan(2a) = \ldots$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *et* $1+\tan^2(a) = \ldots$*)* on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

RÉSUMÉ SUR LES FONCTIONS USUELLES

1 Fonction valeur absolue

Définition 1.1

La fonction valeur absolue, *notée* $|\ \ |$ *est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\begin{cases} |x| = x & \text{si } x \geqslant 0 \\ |x| = -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque. Pour x et a deux réels,
$|x|$ représente la distance entre le point d'affixe x et l'origine
$|x-a|$ représente la distance entre le point d'affixe x et le point d'affixe a.

Pour résoudre une équation du type $|a| = b$, on utilise l'équivalence suivante

$$|a| = b \iff a = b \text{ ou } a = -b$$

Exemple : Résolution de l'équation $|2x-1| = 4$:

$$\begin{aligned} |2x-1| = 4 &\iff 2x-1 = 4 \text{ ou } 2x-1 = -4 \\ &\iff 2x = 5 \text{ ou } 2x = -3 \\ &\iff x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est : $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

Pour résoudre une équation du type $|a| \leqslant b$, on utilise l'équivalence suivante (méthode à adapter pour les autres cas de figure)

$$|a| \leqslant b \iff -b \leqslant a \leqslant b$$

Proposition 1.2

La fonction valeur absolue est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Si on note $f : x \mapsto |x|$, on a :

$$f\ :\ x \longmapsto \begin{matrix} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{matrix} \qquad f'\ :\ x \longmapsto \begin{matrix} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{matrix}$$

2 Fonctions logarithme et exponentielle

Définition 2.1

$\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *est la primitive de la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *qui s'annule en* 1.

Proposition 2.2

1. $\ln$ *est une bijection*[1] *de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. *Elle est continue et dérivable sur son domaine de définition.*
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \big(\ln\big)'(x) = \frac{1}{x}$$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

[1] Pour ceux qui ne connaissent pas cette notion, pas de panique, elle sera expliquée dès les premières semaines de cours...

Définition 2.3

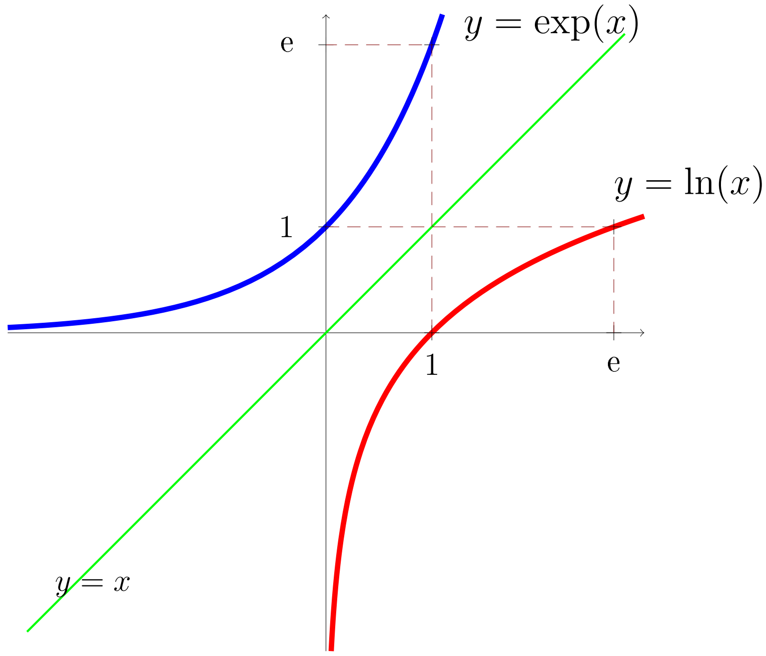
La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *est la bijection réciproque*[2] *de* $\ln$.

Proposition 2.4

1. $\exp$ *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est la fonction exponentielle.*
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.

Proposition 2.5

1. $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, e^{x+y} = e^x e^y$
   $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$



3 Fonctions puissances

Ces notions seront reprises et approfondies lors du chapitre « Bases d'Analyse ».

Définition 3.1 (*Puissances entières d'exposant positif*)

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on définit :* $x^0 = 1$, $x^1 = x$, $x^2 = x \times x$, $\ldots$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on définit* $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} = x \times x^{n-1}$

Définition 3.2 (*Puissances entières d'exposant négatif*)

Soit $x \in \mathbb{R}$, *pour* $x \neq 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$, *on définit :*

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

[2] Pour ceux qui ne connaissent pas cette notion, pas de panique, elle sera expliquée dès les premières semaines de cours...

Racine n-ième

1. **Cas des racines carrées** : Pour $x > 0$, l'équation : $t^2 = x$ admet deux solutions réelles de signe opposé, et on pose $\sqrt{x}$ l'unique solution qui est positive.
   Ainsi, pour x et t **réels positifs** : $\left(t^2 = x \text{ et } t \geqslant 0\right) \iff t = \sqrt{x}$
2. **Cas des racines cubique** : Pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation $t^3 = x$ admet une unique solution réelle, on pose $\sqrt[3]{x}$ l'unique solution de cette équation. Ainsi, pour x et t **réels** : $t^3 = x \iff t = \sqrt[3]{x}$

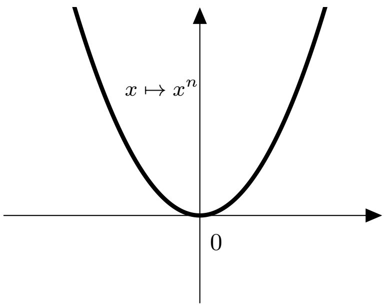
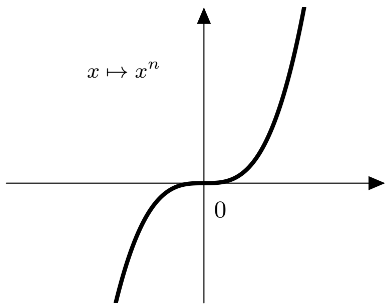
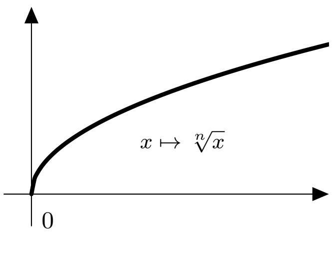
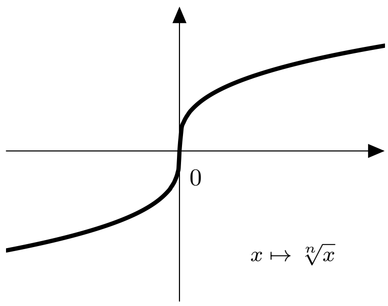
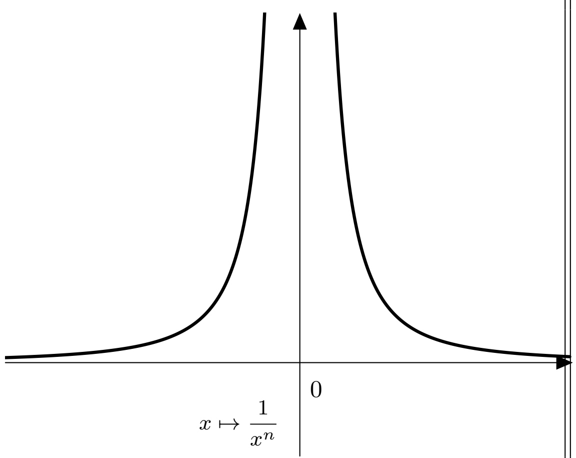
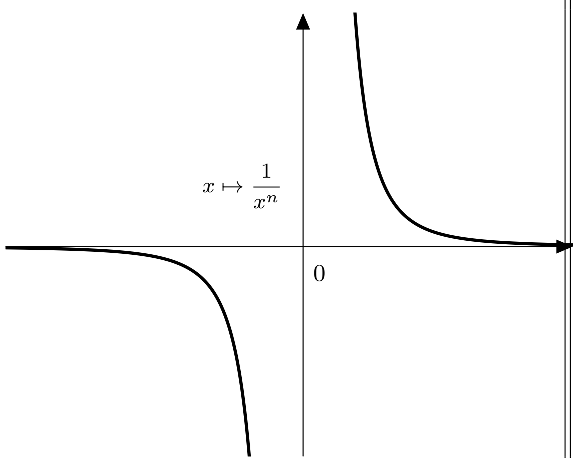
Définition 3.3 (*Racine n-ième*)

> 1. *Pour n entier positif* ***impair****, on définit la fonction racine $n-$ ième sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante : pour $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{x}$ est l'unique réel solution de l'équation $t^n = x$.*
> 2. *Pour n entier positif* ***pair****, on définit la fonction racine $n-$ ième sur $\mathbb{R}_+$ de la façon suivante : pour $x \geqslant 0$, $\sqrt[n]{x}$ est l'unique réel* ***positif*** *solution de l'équation $t^n = x$.*
>
> *De plus, on pourra noter que : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$*

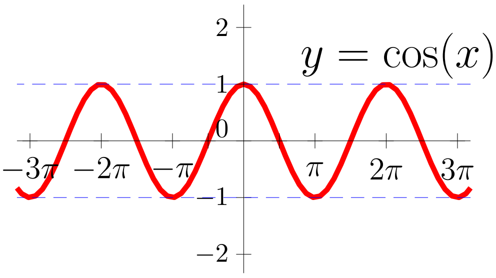
Dérivée des fonction puissances : lorsque la fonction est dérivable et pour α constante, on a

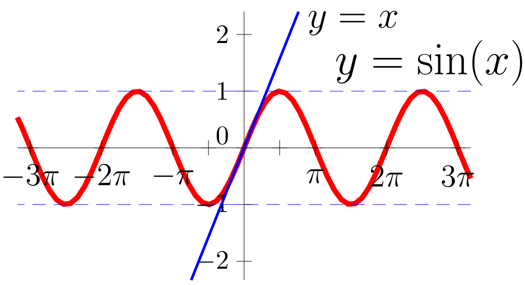
$$\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha - 1}$$

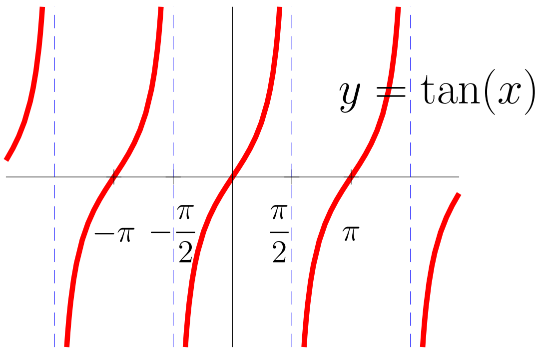
Allure des courbes Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

n pair	n impair
	
	
	

4 Fonctions trigonométriques







✓ cos et sin sont 2π-périodiques
✓ cos et sin sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\sin(x) \qquad \sin'(x) = \cos(x)$$

✓ tan est π-périodique
✓ tan est définie, continue et dérivable sur $D_{\tan} = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + p\pi, \frac{\pi}{2} + p\pi\right[$

$$\forall x \in D_{\tan},\ \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\forall x \in D_{\tan},\ \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

5 Dérivées - Primitives

Fonction	**Dérivée**	**Fonction**	**Dérivée**
x^p	px^{p-1}	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
uv	$u'v + uv'$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\ln\lvert u\rvert$	$\frac{u'}{u}$	e^u	$u'e^u$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$(1 + \tan^2(x))$	$v \circ u$	$u' \times v' \circ u$

Fonction	**Primitive**	**Fonction**	**Primitive**
a	$ax + b$	u'	$u + b$
x	$\frac{1}{2}x^2 + b$	$u'u$	$\frac{1}{2}u^2 + b$
$\frac{1}{x}$	$ln(\lvert x\rvert) + b$	$\frac{u'}{u}$	$ln(\lvert u\rvert) + b$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} + b$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{1}{u} + b$
x^a, avec $a \in \mathbb{R}, a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + b$	$u'u^a$, avec $a \in \mathbb{R}, a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}u^{a+1} + b$
e^{ax+b} avec $a \neq 0$	$\frac{1}{a}e^{ax+b} + c$	$u'e^u$	e^u

Si f est continue sur [a, b]: $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f.

Relation de Chasles. $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t$.

Limites usuelles

✓ La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'un polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

✓ La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fraction rationnelle (quotient de 2 polynomes) est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

✓ La limite en 0 d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus bas degré

✓ Les limites suivantes sont obtenue à l'aide de la définition du nombre dérivé (ce sont les limites d'un taux d'accroissement) :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \quad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1 \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0$$

✓ Croissance comparée exponentielle/puissance et logarithme/puissance en $+\infty$ et $-\infty$:

- pour tout $\alpha>0, n\in\mathbb{N}^*, m\in\mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^n}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^m\mathrm{e}^{\alpha x}=0$
- pour tout $n\in\mathbb{N}^*, m\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\big(\ln(x)\big)^m}{x^n}=0$

✓ Croissance comparée logarithme / puissance en 0^+ :

- pour tout $n\in\mathbb{N}^*, m\in\mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x\to 0^+}x^n\big(\ln(x)\big)^m=0$

PROPRIETE DE LA CROISSANCE COMPAREE POUR CALCULER UNE LIMITE:
"LORSQU'IL Y A INDETERMINATION: *L'exponentielle l'emporte sur les puissances, les puissances l'emportent sur le logarithme* "

IDENTITES REMARQUABLES

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab, \qquad (a-b)^2=a^2+b^2-2ab,$$
$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2, \qquad (a+ib)(a-ib)=a^2+b^2.$$

SOMMES CLASSIQUES

Somme d'une suite arithmétique:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Somme d'une suite géométrique:

$$1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n=\begin{cases}\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & si\ q\neq 1\\ n+1\,, & si\ q=1\end{cases}$$

Espérance d'une variable aléatoire finie :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

Variance : $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
Ecart-type : $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Loi de Bernoulli : $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Loi uniforme entre 1 **et** n : $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$, pour k entre 1 et n.

Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$: $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k},\ k = 0, \ldots, n$.

Probabilité de A **sachant** B :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, c'est-à-dire si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

Formule des probabilités totales : si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}(B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B).$$

Partie III : Indications et Pistes

1 Équations - Inéquations

Exercice 1.1

1. Factoriser le polynôme en recherchant des racines évidentes.
2. Factoriser le polynôme.
3. Factoriser le polynôme à l'aide d'une identité remarquable.
4. Factoriser le polynôme en recherchant des racines évidentes.
5. Factoriser le polynôme.
6. Factoriser le polynôme en recherchant des racines évidentes.

Exercice 1.2

1. Faire un tableau de signe si besoin.
2. Le signe d'un quotient est le même que celui d'un produit en elevant les annulations du dénominateur.
3. Factoriser le polynôme en recherchant des racines évidentes (il y en a deux différentes ici).
4. Transformer en encadement ou faire un dessin pour visualiser $|x-9|$ comme la distance entre x et 9.
5. Regrouper en mettant au même dénominateur.
6. Résoudre $3x^2-2 \geqslant 0$ puis élever au carré dans l'inégalité... pourquoi a-t-on le droit de le faire sans changer le sens des inégalités ?

Exercice 1.3

1. Voir l'exemple du cours.
2. Distinguer les cas de valeurs égales et de valeurs opposées.
3. Encadrer $\dfrac{1}{x}$. On fera attention au signe de x pour le passage à l'inverse.
4. Utiliser le cercle trigonométrique.
5. Utiliser $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ et faire le lien avec $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
6. On fera l'étude de l'inégalité $\sqrt{3x+1} > x$ en séparant les cas $x \leqslant 0$ et $x > 0$.
7. Poser $u = \mathrm{e}^x$ et obtenir un polynôme de degré 3 à factoriser.
8. Regrouper les logarithmes après avoir donné le domaine de définition.

Exercice 1.4

1. Relier $\cos(2x)$ à $\cos^2(x)$ à l'aide des formules de trigonométrie et poser $t = \cos(x)$.
2. Diviser par 2 et reconnaître une formule de trigonométrie.
4. Factoriser le numérateur et faire un tableau de signe regroupant chaque morceau.

Exercice 1.5

On donne ici des pistes pour résoudre les systèmes par substitution, bien que ce ne soit pas la méthode conseillée. En effet, on préfèrera l'utilisation de combinaisons linéaires d'équations pour éliminer les variables, c'est la méthode du pivot de Gauss. Cette méthode est algorithmique et peut donc se généraliser à un système de taille quelconque.
Pour résoudre par substitution :

1. $3(E_1) + (E_2)$ donne x.
2. $(E_1) - 2\mathrm{i}(E_2)$ donne y.
3. L'équation (E_3) donne $z = 3 + x + 2y$ on peut alors substituer dans (E_1) et (E_2).

Pour résoudre (S_3) par la pivot de Gauss (méthode vu en 1A) par exemple : on récrit les équations en placant la variable y en premier, puis on remplace E_2 par $E_2 + E_1$ et E_3 par $E_3 - 2E_1$, ainsi, il n'y a plus de « y » dans les nouvelles équations 2 et 3. On peut alors recommencer l'opération pour éliminer x de la dernière équation en utilisant les 2 dernières lignes de ce système.

2 Fonctions d'une variable réelle

Exercice 2.1

Voir l'étude des fonctions usuelles correspondantes.

Exercice 2.2

Les questions 1, 3, 4, 5 et 7 sont des limites usuelles (la 7 est un taux d'accroissement).

2. Ce n'est pas une forme indéterminée.
6. Factoriser par e^2, on se retrouve avec une limite usuelle.
7. Reconnaître un taux d'accroissement, voir aussi formulaire des limites usuelles.
8. Se déduit de 7.

Exercice 2.3

On pourra donner une expression de $f(x)$ sans valeur absolue pour toute valeur de x dans le domaine de définition.

Exercice 2.5

2. Donner le domaine de définition puis calculer f', on en déterminera le signe en regroupant les fractions.

Exercice 2.6

Bien séparer l'étape qui permet de « deviner la formule », en calculant si besoin les dérivées suivantes, de la rédaction de la récurrence en elle-même. Soigner la rédaction de la récurrence.

Exercice 2.7

Il est plus facile de développer le produit avant de calculer la dérivée !

Exercice 2.8

1. Voir comment est modifié le graphe de la fonction sinus.
2. Penser à simplifier l'expression de g.

3 Suites numériques - Raisonnement par récurrence

Exercice 3.1

✓ Calculer et simplifier $u_n - 4$.
✓ Calculer et simplifier $u_{n+1} - u_n$
✓ Factoriser le numérateur et le dénominateur de u_n par le « terme prépondérant » à savoir n^2 ici.

Exercice 3.2

On procédera par encadrement en commençant par le sinus.

Exercice 3.3

3. Commencer par donner u_n en fonction de n.

4 Trigonométrie

Pour les exercices **4.1**, **4.2**,**4.3** **4.6** : Bien apprendre les formules de trigo !!!!!

Exercice 4.4

$\cos(3x) = \cos(2x + x)$

5 Calcul intégral - Calcul de primitives

Exercice 5.1

Chercher à reconnaître des formes dérivées comme « $\frac{u'}{u}$, $u' \times u^n$, ... » pour pouvoir intégrer directement. Il est important de s'entrainer à « voir » cela.

Exercice 5.2

3. Exprimer en fonction de $\cos(2x)$.
4. Formule de trigonométrie permettant de transformer le produit en une somme.

6 Nombres complexes

Pour les exercices **6.1**, **6.2** et **6.3** et de manière générale lorsqu'on manipule des nombres complexes, il faut penser à faire le lien avec la géométrie. Ne pas hésiter à placer les points sur le plan. Par exemple, quel est l'argument d'un nombre complexe placé sur la première bissectrice (d'équation $y = x$) ?

7 Calcul algébrique

Exercice 7.5

Développer $(\cos(y) + \sin(y))^2$ et $(\cos(y) - \sin(y))^2$. Pour la simplification, réfléchir au signe des expressions.

8 Géométrie

Exercice 8.1

Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $(AB) \perp (AC)$ ce qui se traduit par l'annulation d'un certain produit scalaire.

Exercice 8.2

Un point M de coordonnées (x, y, z) est dans le plan étudié si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$.

Exercice 8.3

Un point M de coordonnées (x, y, z) est sur la sphère étudiée si et seulement si $CM^2 = R^2$.
Un point M de coordonnées (x, y, z) est dans le plan étudié si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} = 0$.

Exercice 8.4

Savoir faire ce genre d'exercice est indispensable en particulier pour les cours de physique, on vous demande d'être efficace et de savoir répondre rapidement à ce type de questions. Plusieurs techniques peuvent être utilisées, on pourra par exemple considérer le vecteur $\vec{u} = \dfrac{\vec{F}}{F}$ qui est un vecteur du cercle trigonométrique et faire le lien entre β et l'angle θ « habituel » (entre $\vec{e}_x$ et $\vec{u}$) tel que $\vec{u}$ ait pour coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. On a ici $\theta = \dfrac{\pi}{2} + \beta$.