Université Sultan Moulay Slimane
Ecole National des Sciences Appliquées
Khouribga

Théorie de la calculabilité et de la complexité

$4^{ème}$ Année Génie informatique
Semestre 4 / Année universitaire 2018/2019
Feuille de TD N° 3
CH3 : Langages réguliers
Corrigés des exercices 2 et 4

Exercice 2

Soit l'expression régulière $r = a(a \mid bb)^* \mid b$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Déterminer tous les mots du langage dénoté par r dont la longueur ≤ 4.

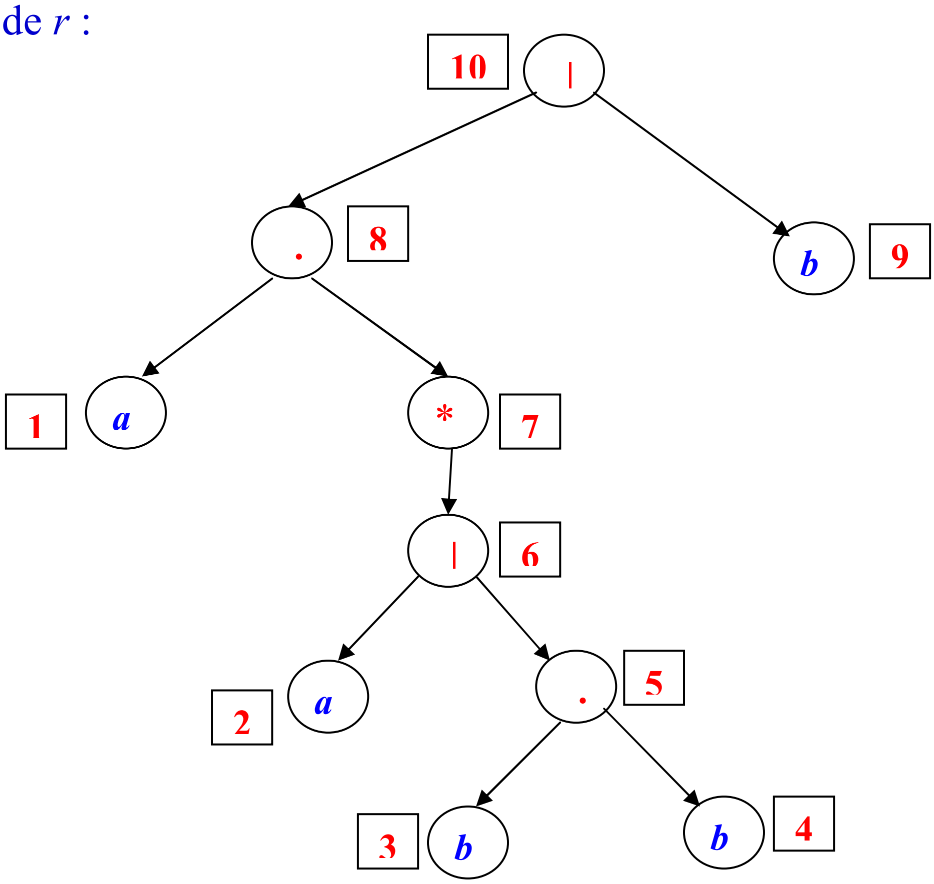
   Réponse :

   Ce sont les mots : *a*, *b*, *aa*, *aaa*, *abb*, *aaaa*, *aabb* et *abba*.

2. En utilisant l'**algorithme de Thompson**, convertir r en un **AFND** M.

   Réponse :

   - L'arbre de r :

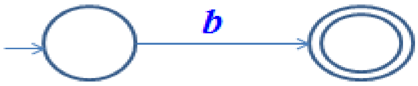


Remarque : l'arbre doit être parcourut en ordre postfixe.

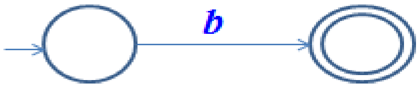
1

2

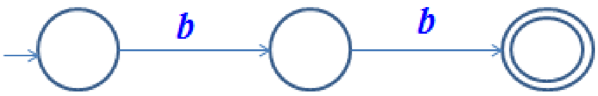
3



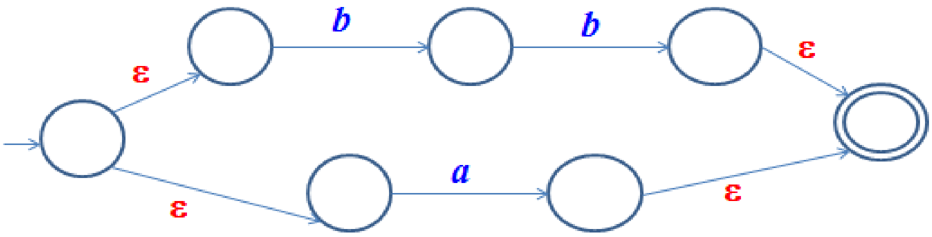
4



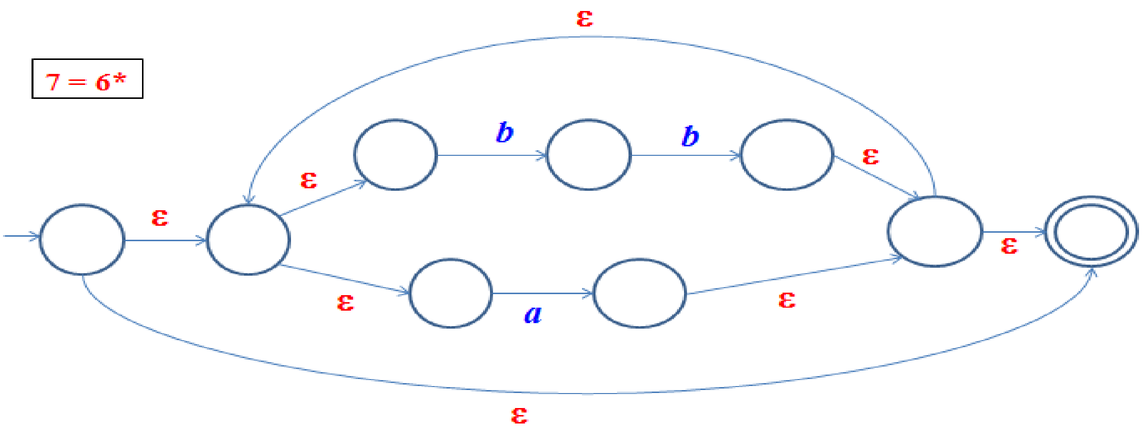
5 = 3 . 4



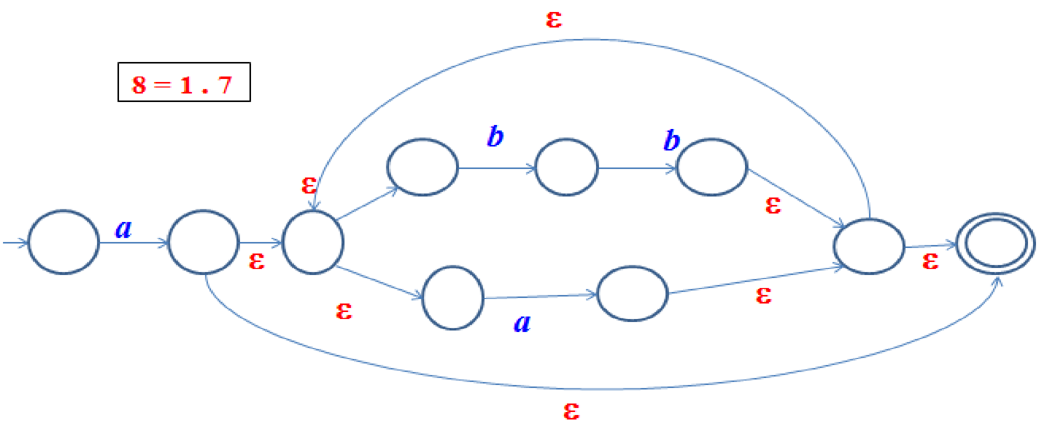
6 = 2 | 5



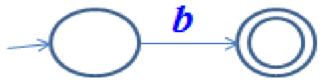
7 = 6*



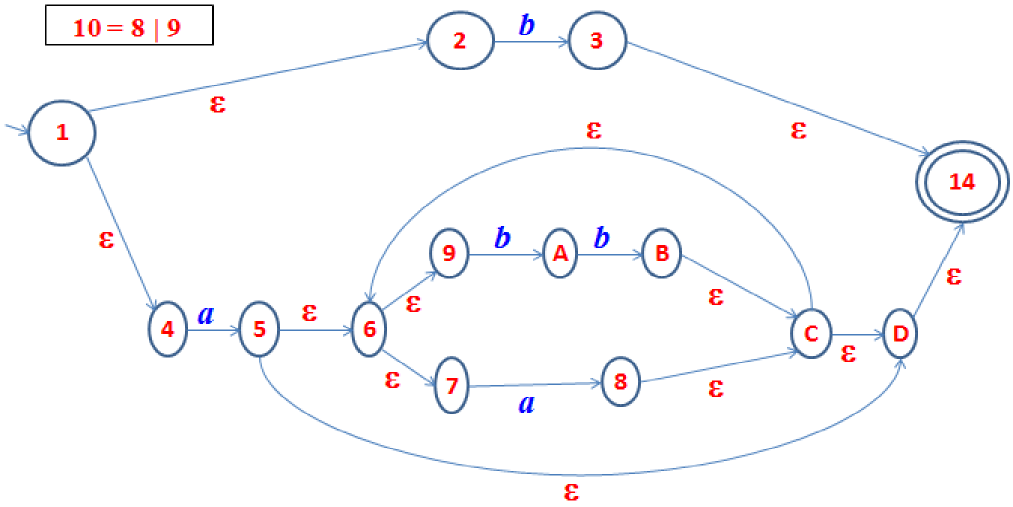
8 = 1 . 7



9



10 = 8 | 9

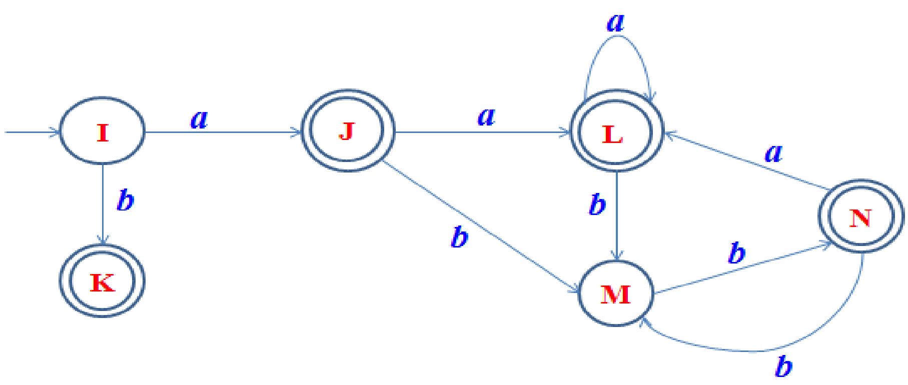


3. Déterminiser *M*.

Réponse :

- $q_0' := \hat{E}(\{1\}) = \{1, 2, 4\} = I;$
- $\delta'(I, a) := \hat{E}\left(\bigcup_{q\in I}\delta(q,a)\right) = \{5, 6, 7, D, 14\} = J;$
- $\delta'(I, b) := \hat{E}\left(\bigcup_{q\in I}\delta(q,b)\right) = \{3, 14\} = K;$
- $\delta'(J, a) := \{6, 7, 8, 9, C, D, 14\} = L;$ $\delta'(J, b) := \{A\} = M;$
- $\delta'(K, a) := \varnothing;$ $\delta'(K, b) := \varnothing;$
- $\delta'(L, a) := \{6, 7, 8, 9, C, D, 14\} = L;$
- $\delta'(L, b) := \{A\} = M;$
- $\delta'(M, a) := \varnothing;$ $\delta'(M, b) := \{6, 7, 9, B, C, D, 14\} = N;$
- $\delta'(N, a) := L;$ $\delta'(N, b) := M;$
- $E' := \{I, J, K, L, M, N\};$ $F' := \{J, K, L, N\};$

Le diagramme de l'AFD obtenu est :



4. Minimiser l'**AFD** obtenu.

Réponse :

- P_0 := (#1 = {I, M}, #2 = {J, K, L, N});

Classes	Etats	*a*	*b*
#1	I	#2	#2
	M	-	#2
#2	J	#2	#1
	K	-	-
	L	#2	#1
	N	#2	#1

- P_1 := (#1 = {I}, #2 = {M}, #3 = {K}, #4 ={J, L, N});

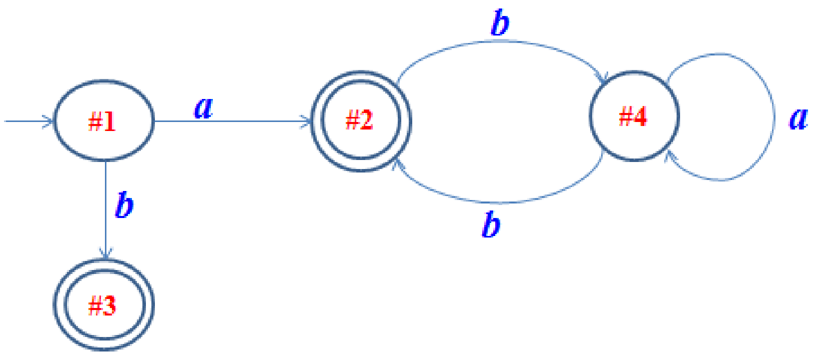
Classes	Etats	*a*	*b*
#1	I	#4	#3
#2	M	-	#4
#3	K	-	-
#4	J	#4	#2
	L	#4	#2
	N	#4	#2

Aucune nouvelle partition ne peut être trouvée ➔ Arrêt de l'algorithme de minimisation. L'AFD minimal a donc 4 états : #1, #2, #3 et #4.

- Son état initial est : #1;
- Ses états finaux sont : #3 et #4.
- Sa table de transition est :

Etats	a	b
#1	#4	#3
#2	-	#4
#3	-	-
#4	#4	#2

- Son diagramme est :



Exercice 4

Démontrer le lemme suivant (**Lemme d'Arden**) :

Si A et B sont deux langages réguliers sur un même alphabet Σ, et si $\varepsilon \notin A$, alors l'unique solution de l'équation $X = AX + B$ est :$X = A^*B$.

Réponse :

Posons $R = A^*B$. On montre que R est la solution unique de l'équation :

$$X = AX + B$$

- R est une solution de l'équation $X = AX + B$. En effet, nous avons :

  $AR + B = A(A^*B) + B$

  $= (AA^*)B + B$ [**Associativité de la concaténation**]

  $= A^+B + B$ [$AA^* = A^+$]

$= (A^+ + \{\varepsilon\})B$ [**Distributivité de la concaténation sur +**]

$= A^*B$ [$\boldsymbol{A^+ + \{\varepsilon\} = A^*}$]

$= R$

- R est l'unique solution de l'équation $X = AX + B$. Supposons qu'il existe une autre solution S de l'équation $X = AX + B$, c'est-à-dire que $S = AS + B$.

  $R \setminus S = (AR + B) \setminus S$

  $= (AR) \setminus S$ [**puisque $\boldsymbol{B \subseteq S}$**]

  $\subseteq (AR) \setminus (AS)$ [**car $\boldsymbol{AS \subseteq S}$**]

  $\subseteq A(R \setminus S)$

  $\subseteq A^n(R \setminus S),\ \forall\ n \geq 0$ [**Par récurrence**]

  Soit un mot $w \in (R \setminus S)$. Ce mot appartient alors au langage $A^n(R \setminus S)$, pour tout entier $n \geq 0$. Comme $\varepsilon \notin A$, alors le mot le plus court de A est forcément de longueur ≥ 1. Par conséquent, $|w| \geq n$, $\forall\ n \geq 0$. Cela est impossible. Donc, le langage $(R \setminus S)$ est vide.

  Par une démonstration analogue, on montre que (S \ R) est aussi vide (en fait R et S jouent des rôles symétriques). Ce qui prouve finalement que $R = S$.