

Chapitre 1

Propagation libre et non dispersive

Ce premier chapitre est en bonne partie constitué de rappels de CPGE. Au cours de ce chapitre, nous allons dégager les conditions sous lesquelles un phénomène est ondulatoire, en insistant sur la notion de grandeurs couplées. Nous rappellerons également la phénoménologie associée à diverses solutions de l'équation de d'Alembert. Enfin, nous passerons un temps important à construire précisément la notion centrale de paquet d'onde.

1.1 Qu'est-ce qu'une onde ?

1.1.1 Rappel par l'exemple

Commençons par rappeler trois exemples de situations physiques donnant lieu à la propagation d'ondes.

Exemple des ondes « électrocinétiques » dans un câble coaxial décrit par un modèle à constantes réparties

Un câble coaxial se compose comme son nom l'indique de deux conducteurs cylindriques de même axe, l'âme et la gaine, séparés par un isolant, comme représenté figure 1.1. Comme nous le montrerons §3.4 lors du chapitre sur le guidage, des ondes électromagnétiques se propagent le long du câble. Parmi ces ondes, certaines (le mode TEM, que nous définirons) peuvent être décrites par un modèle de type électrocinétique. Dans ce cadre, le câble vérifie localement des équations identiques à celles obtenues dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires de l'électromagnétisme, ce qui permet une étude électrocinétique.

| **Remarque :** Insistons sur le fait que le modèle à constantes réparties décrit uniquement le mode TEM.

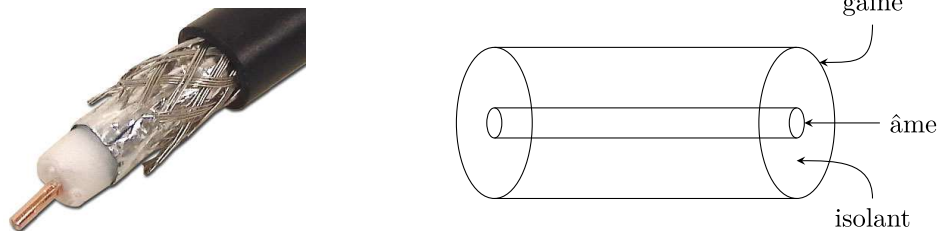


Fig. 1.1 – Câble coaxial. Un câble coaxial se compose de deux conducteurs coaxiaux, l'âme et la gaine, séparés par un isolant. Photo : <http://news.techgenie.com/>.

Comme représenté figure 1.2, une portion mésoscopique de câble de longueur δx se modélise par un circuit LC constitué

- ▷ d'une bobine, d'inductance $\Lambda \delta x$, qui modélise les phénomènes d'induction ayant lieu entre les deux conducteurs, parcourus par des courants variant dans le temps ;
- ▷ d'un condensateur, de capacité $\Gamma \delta x$, qui modélise les phénomènes capacitifs ayant lieu entre les deux conducteurs, chargés, se faisant face.

Appliquons les lois de Kirchhoff à la portion mésoscopique considérée. La loi des mailles s'écrit

$$u(x + \delta x, t) + \Lambda \delta x \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) - u(x, t) = 0, \quad (1.1)$$

d'où dans la limite $\delta x \rightarrow 0$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x, t).} \quad (1.2)$$

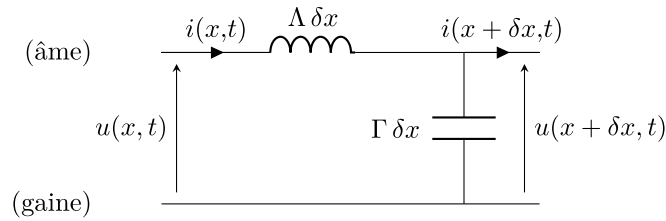


Fig. 1.2 – Modélisation mésoscopique d'un câble coaxial. Une portion mésoscopique de câble de longueur δx est modélisé par un circuit LC, d'inductance $\Lambda \delta x$ et de capacité $\Gamma \delta x$. La gaine est souvent reliée à la masse, mais ce n'est pas obligatoire.

La loi des nœuds s'écrit quant à elle

$$i(x, t) = i(x + \delta x, t) + \Gamma \delta x \frac{\partial u}{\partial t}(x + \delta x, t), \quad (1.3)$$

ce qui devient dans la limite $\delta x \rightarrow 0$

$$\boxed{\frac{\partial i}{\partial x}(x, t) = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x, t).} \quad (1.4)$$

On trouve alors deux équations aux dérivées partielles, linéaires mais couplées. Le découplage se fait en dérivant l'une des deux équations par rapport à la position, l'autre par rapport au temps, et à l'aide du lemme de Schwartz. On obtient alors la même équation de d'Alembert pour chacune des grandeurs couplées [2, §13.1] :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}.} \quad (1.5)$$

Application numérique : Pour un câble coaxial de TP, les valeurs typiques sont $\Gamma = 100 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$, $\Lambda = 0.15 \text{ } \mu\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ et $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Complément : Exemple des ondes électromagnétiques dans un milieu vide de charge et de courant

Les équations couplées sont directement les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.6)$$

Remarque : Même si elles ne couplent pas directement les champs, il ne faut pas oublier les deux équations faisant intervenir la divergence.

Comme nous le comprendrons au paragraphe suivant, les « bonnes » grandeurs couplées des ondes électromagnétiques sont le champ électrique $\vec{E}$ et l'excitation magnétique $\vec{H}$, égale à $\vec{B}/\mu_0$ dans le vide. Les équations de Maxwell s'écrivent en fonction de ces deux champs

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.7)$$

Le découplage se fait en calculant le rotationnel des équations en rotationnel, et conduit à l'équation de d'Alembert tridimensionnelle pour $\vec{E}$ comme pour $\vec{H}$,

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.} \quad (1.8)$$

Complément : Exemple des ondes sonores dans un solide élastique

Intéressons-nous aux ondes sonores se propageant dans un barreau solide, qui sont des ondes de déformation longitudinale de celui-ci. Supposons que ses propriétés d'élasticité sont décrites par la loi de Hooke [7, §III.A]. Celle-ci est une approximation linéaire de la loi de comportement du solide réel, valable tant que les déformations sont petites. Si on applique une force F à une extrémité du solide de section S , l'allongement relatif du solide est donné par

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}, \quad (1.9)$$

où E est un coefficient phénoménologique, appelé *module d'Young* du solide. Pour les matériaux usuels, il est de l'ordre de $10^{11} - 10^{12}$ Pa.



Fig. 1.3 – Loi de Hooke. Le barreau solide de section S a une longueur au repos ℓ . Une force F est appliquée à une de ses extrémités, l'allongeant d'une quantité $\Delta\ell$.

Remarque : L'allongement est également associé à une contraction latérale du solide [7, §III.A]. En notant $d \sim \sqrt{S}$ la dimension latérale typique du solide, la contraction latérale relative est donnée par

$$\frac{\Delta d}{d} = -\sigma \frac{\Delta\ell}{\ell}. \quad (1.10)$$

σ est également un coefficient phénoménologique, appelé coefficient de Poisson du solide. Pour les matériaux usuels, il est de l'ordre de 0.3. Dans la suite, ces effets de contraction latérale sont négligés et seule la déformation longitudinale est envisagée.

Cherchons l'équation aux dérivées partielles à laquelle obéit le champ des déformations longitudinales $\xi(x, t)$. Pour ce faire, considérons une tranche mésoscopique de solide, de section S et de longueur au repos δx .

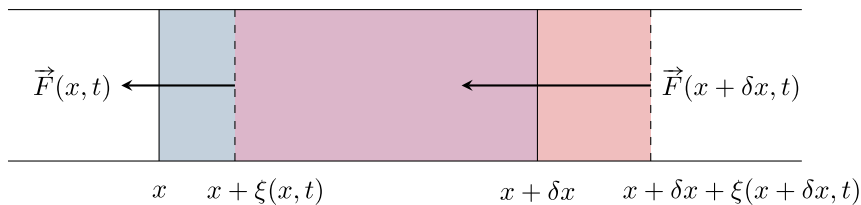


Fig. 1.4 – Élément mésoscopique de solide. L'élément mésoscopique est situé au repos entre les abscisses x et $x + \delta x$, et sous l'effet des efforts externes est déplacé entre $x + \xi(x, t)$ et $x + \delta x + \xi(x + \delta x, t)$

L'allongement de l'élément solide vaut

$$\Delta\ell = \{[x + \delta x + \xi(x + \delta x, t)] - [x + \xi(x, t)]\} - \delta x = \xi(x + \delta x, t) - \xi(x, t). \quad (1.11)$$

Connaissant l'allongement de l'élément solide, cherchons maintenant la force $\vec{F}(x, t) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \vec{F}_{\text{d} \rightarrow \text{g}}(x, t)$ exercée par la partie « droite » du solide sur la partie « gauche » à l'abscisse x à l'instant t . À l'échelle mésoscopique, le solide est toujours un milieu continu et obéit donc encore à la loi de Hooke. Ainsi,

$$\vec{F}(x, t) = E S \frac{\xi(x + \delta x, t) - \xi(x, t)}{\delta x} \vec{e}_x. \quad (1.12)$$

Le sens du vecteur force s'obtient sur la base d'arguments physiques : si le solide est allongé, il cherche à se contracter pour retrouver sa longueur au repos. En passant à la limite $\delta x \rightarrow 0$,

$$\vec{F}(x, t) = E S \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \vec{e}_x. \quad (1.13)$$

Appliquons désormais le principe fondamental de la dynamique à l'élément mésoscopique. En notant ρ la masse volumique du solide et x_G , $x \leq x_G \leq x + \delta x$, la position (*a priori* inconnue) de son centre de masse, ce dernier s'écrit

$$\rho S \delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x_G, t) \vec{e}_x = \vec{F}_{\text{g} \rightarrow \text{d}}(x, t) + \vec{F}_{\text{d} \rightarrow \text{g}}(x + \delta x, t). \quad (1.14)$$

En vertu du principe des actions réciproques et en notant

$$F \stackrel{\text{def.}}{=} \vec{F} \cdot \vec{e}_x = \vec{F}_{d \rightarrow g} \cdot \vec{e}_x, \quad (1.15)$$

on obtient

$$\rho S \delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x_G, t) = -F(x, t) + F(x + \delta x, t), \quad (1.16)$$

ce qui donne dans la limite $\delta x \rightarrow 0$

$$\rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, t). \quad (1.17)$$

D'après (1.13), cette équation devient

$$\rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E S \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (1.18)$$

soit

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0, \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (1.19)$$

Ainsi, la propagation des déformations dans un solide élastique est un phénomène ondulatoire, décrit par l'équation de d'Alembert de célérité $c = \sqrt{E/\rho}$.

Application numérique : Pour le fer, $\rho = 7.9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $E = 2.0 \times 10^{11} \text{ Pa}$, ce qui donne comme vitesse du son $c = 5.0 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Pour faire apparaître de façon transparente des équations couplées, écrivons un peu différemment les deux équations qui sont la loi de force (1.13) et le PFD (1.17).

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{F}{S} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F}{S} \right) = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \end{cases} \quad (1.20)$$

La contrainte F/S et la vitesse de déformation $\partial \xi / \partial t$ sont donc les grandeurs ondulatoires couplées du problème. Remarquons la symétrie entre ces deux équations : les variations dans le temps de la contrainte F/S entraînent les variations dans l'espace de la dérivée temporelle de la déformation $\partial \xi / \partial t$ et réciproquement. Remarquons aussi que dériver la loi de force par rapport au temps conduit à l'équation de d'Alembert pour la contrainte, avec la même célérité.

Remarque : Il est essentiel que le barreau solide ait une surface latérale S finie, sans quoi les efforts latéraux ne peuvent plus être négligés et modifient drastiquement l'expression de la célérité [7, §V.D], faisant notamment intervenir le coefficient de Poisson. Ceci est relié au fait que la « bonne » grandeur couplée est la contrainte F/S et non la force F .

1.1.2 Tentative de caractérisation d'un phénomène ondulatoire

Leur diversité rend la définition générale d'une onde délicate à donner¹. On peut toutefois tenter de dégager des caractéristiques communes à tous types d'ondes.

Une **onde** correspond à la propagation d'une perturbation à travers un milieu.
Cette perturbation est générée par une source, qui apporte de l'énergie au milieu.

La propagation d'une onde dans un milieu n'entraîne jamais de transport macroscopique de matière². Cela ne veut cependant pas dire qu'il est impossible d'avoir simultanément une onde et du transport : on peut penser par exemple à des ondes acoustiques se propageant dans un fluide en écoulement. Dans ce cas, l'onde n'est pas à l'origine du phénomène de transport.

Dans les trois exemples précédents, on a mis en évidence l'importance du couplage entre deux champs, ce qui est très général :

Pour qu'il y ait propagation, il faut qu'il existe un couplage entre deux champs, appelés **grandeurs couplées**.
Le couplage se traduit par des échanges d'énergie entre les grandeurs couplées.

1. Une onde est parfois définie comme un champ dont les dérivées spatiales et temporelles sont couplées par une équation aux dérivées partielles ... ce qui englobe à peu près toute la physique des milieux continus, et me semble être une définition beaucoup trop large.

2. Le cas des ondes de matière de la mécanique quantique ne rentre bien sûr pas dans ce cadre ... mais il s'agit quand même d'ondes particulièrement particulières !

En pratique, les variations temporelles d'une grandeur couplée entraînent les variations spatiales de l'autre, et réciproquement. Formellement, les champs obéissent à des équations couplées, qui sont en général symétriques. Pour identifier les « bonnes » grandeurs couplées, il faut se concentrer sur les aspects énergétiques.

- ▷ Le carré des grandeurs couplées est associé à un stockage d'énergie. Dans les exemples précédents,
 - ↪ $\frac{1}{2}\Gamma u^2$ est une énergie électrique linéique, $\frac{1}{2}\Lambda i^2$ une énergie magnétique linéique ;
 - ↪ $\frac{1}{2}\rho(\partial\xi/\partial t)^2$ est une énergie cinétique volumique, $\frac{1}{2E}(F/S)^2$ une énergie potentielle d'élasticité volumique ;
 - ↪ $\frac{1}{2}\mu_0\vec{H}^2$ est une énergie magnétique volumique, $\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2$ une énergie électrique volumique.
 Remarquons qu'on voit ici apparaître les constantes de couplage.
- ▷ Leur produit est homogène à une puissance (éventuellement une puissance surfacique). Dans les exemples précédents,
 - ↪ $\frac{F}{S} \times \frac{\partial\xi}{\partial t}$ est la puissance surfacique développée par la contrainte ;
 - ↪ $\vec{u} \times \vec{i}$ est une puissance électrocinétique ;
 - ↪ $\vec{E} \wedge \vec{H}$ est le vecteur de Poynting de l'électromagnétisme, qui n'est autre qu'une puissance surfacique.

Le découplage des équations couplées permet d'obtenir l'équation de propagation. Pour que les échanges d'énergie entre grandeurs couplées à l'origine de la propagation puissent se faire,

L'équation de propagation est la même pour les deux grandeurs couplées.

Insistons sur le fait qu'en dehors du couplage entre deux champs, qui est la caractéristique fondamentale des phénomènes ondulatoires, ces derniers recouvrent par ailleurs des situations très diverses.

- ▷ La propagation peut être à une, deux ou trois dimensions, dans un milieu lui-même à une, deux ou trois dimensions ;
- ▷ La propagation peut ou non entraîner un transport macroscopique d'énergie ;
- ▷ Les champs peuvent être scalaires ou vectoriels, voire même tensoriels (pour les ondes gravitationnelles) ;
- ▷ La perturbation peut être orientée différemment par rapport à la direction de propagation. On distingue entre autres
 - ↪ les **ondes longitudinales**, où la perturbation est colinéaire à la direction de propagation (c'est le cas des ondes acoustiques) ;
 - ↪ les **ondes transverses**, où la perturbation est orthogonale à la direction de propagation (c'est le cas des ondes électromagnétiques dans le vide illimité) ;
 - ↪ mais il existe aussi des cas plus complexes, comme nous le verrons au chapitre 3 sur le guidage.

Dans les exemples précédents, l'équation de propagation est l'équation de d'Alembert.

L'équation de d'Alembert est une équation de la forme

$$\Delta \vec{\xi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{0}. \quad (1.21)$$

où c est la vitesse de propagation, ou **célérité**, des ondes.

Le champ $\vec{\xi}$ peut être vectoriel ou scalaire, et le laplacien peut se simplifier en fonction des symétries du problème. La propriété sans doute la plus importante de l'équation de d'Alembert est sa linéarité :

L'équation de d'Alembert est une équation **linéaire**.

Cela permet d'appliquer le principe de superposition des solutions.

Notons que l'équation de d'Alembert ne décrit pas tous les phénomènes de propagation, comme nous le verrons lors du chapitre 2 sur la dispersion. En particulier, elle est invariante par renversement du temps, ce qui est loin d'être systématique, en particulier en présence d'absorption. En revanche, la plupart des équations de propagation qu'on peut rencontrer en passant l'agreg sont linéaires, mais ce n'est pas systématique.

1.2 Différentes familles d'ondes

L'équation de d'Alembert peut se résoudre en toute généralité à l'aide d'une fonction de Green [8, §3.1], mais sa forme n'est ni simple ni aisément exploitable. En revanche, dans certains cas de bonne géométrie, il existe une écriture simple et générale des solutions.

Commençons par rappeler la notion utile de surface d'onde, qui permet de classer simplement différents types d'ondes :

Une **surface d'onde** d'une onde est une surface continue de l'espace dont tous les points sont dans le même état vibratoire, c'est-à-dire que le champ ξ y prend la même valeur.

1.2.1 Ondes planes

Une onde est dite **plane** si ses surfaces d'onde sont des plans parallèles.
Ces plans sont appelés **plans d'onde**.

À ces plans sont associés leur vecteur normal $\vec{n}$ qui définit la **direction de propagation**. Ainsi, formellement, la dépendance spatiale du champ associé à une onde plane ne dépend que de $\vec{r} \cdot \vec{n}$, qui peut se réécrire comme une unique coordonnée cartésienne dans un repère bien choisi, et ce quelle que soit la dimension de l'espace dans lequel l'onde se propage.

Une onde plane est une onde à une dimension spatiale cartésienne.

Par extension, toute onde ne dépendant que d'une coordonnée cartésienne, y compris dans un milieu 1d ou 2d, est appelée onde plane. C'est le cas par exemple des ondes le long d'une corde vibrante. De façon générale, l'équation de d'Alembert pour une onde plane $\xi(x, t)$ se réduit à

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0. \quad (1.22)$$

Cherchons des solutions de cette équation se propageant avec la célérité c , c'est-à-dire telles que

$$\xi(x', t') = \xi(x, t) \quad \text{si et seulement si} \quad (x' - x) = \pm c(t' - t). \quad (1.23)$$

Le signe est laissé libre pour permettre des solutions se propageant dans les deux sens, vers les x croissants ou décroissants. Cette condition se reformule sous la forme

$$x' \pm ct' = x \pm ct. \quad (1.24)$$

On en déduit donc que les variables $u = x - ct$ et $v = x + ct$ sont des variables privilégiées du problème.

Une onde plane ne dépendant que de la variable $x - ct$ ou de la variable $x + ct$ est dite **progressive**.
Une telle onde se propage à la célérité c , dans le sens des x croissants si elle dépend de $x - ct$
et dans le sens des x décroissants si elle dépend de $x + ct$.

Remarque : Bien entendu, toutes les ondes planes **ne sont pas** des ondes planes progressives, et leurs dépendances spatiales et temporelles sont couplées de façon plus complexe.

Réécrivons l'équation d'onde (1.22) en termes des variables privilégiées $u = x - ct$ et $v = x + ct$. Cela donnera accès facilement à la solution générale de cette équation.

Remarque : Pour que cette réécriture soit valide, il est important de noter que ces deux variables sont indépendantes, on passe de la représentation en (x, t) à celle en (u, v) de façon univoque dans les deux sens. C'est donc un « bon » changement de variables.

Considérons donc

$$\xi = \xi(u, v) = \xi(u(x, t), v(x, t)), \quad (1.25)$$

et exprimons les dérivées partielles par rapport à x et t intervenant dans l'équation de d'Alembert en termes des dérivées partielles par rapport à u et v :

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|_x = \left. \frac{\partial \xi}{\partial u} \right|_v \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_x + \left. \frac{\partial \xi}{\partial v} \right|_u \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_x = \left. \frac{\partial \xi}{\partial u} \right|_v \times (-c) + \left. \frac{\partial \xi}{\partial v} \right|_u \times c, \quad (1.26)$$

puis

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -c \frac{\partial}{\partial t} \left(\left. \frac{\partial \xi}{\partial u} \right|_v \right) + c \frac{\partial}{\partial t} \left(\left. \frac{\partial \xi}{\partial v} \right|_u \right) \quad (1.27)$$

$$= -c \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial^2 \xi}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} \right). \quad (1.29)$$

Le même calcul pour le calcul de la dérivée spatiale conduit à

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}. \quad (1.30)$$

Ainsi, l'équation de d'Alembert se réécrit en fonction de u et v sous la forme

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = 0. \quad (1.31)$$

Intégrons alors successivement par rapport aux deux variables. L'intégration sur u (à v fixé) donne

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = G(v), \quad (1.32)$$

où G est une fonction de v seulement, c'est-à-dire « une constante par rapport à u ». L'intégration sur v (à u fixé) donne ensuite

$$\xi(u, v) = f(u) + g(v), \quad (1.33)$$

où $G(v) = g'(v)$, et où f est une fonction de u seulement. En conclusion,

Toute onde plane, solution de l'équation de d'Alembert à une dimension, peut s'écrire de façon générale sous la forme d'une superposition de deux ondes planes progressives :

$$\xi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) = \varphi\left(t - \frac{x}{c}\right) + \psi\left(t + \frac{x}{c}\right). \quad (1.34)$$

f et φ sont des ondes planes progressives se propageant à la célérité c dans le sens des x croissants, alors que g et ψ sont des ondes planes progressives se propageant à la célérité c dans le sens des x décroissants.

Mathématiquement, f , g , φ et ψ sont des fonctions quelconques deux fois dérivables.

Remarque : La décomposition en $f + g$ est pratique pour travailler en fonction de x à t fixé, alors que la décomposition en $\varphi + \psi$ est plus appropriée pour travailler en fonction de t à x donné.

1.2.2 Ondes sphériques

Une onde est dite **sphérique** si ses surfaces d'onde sont des sphères concentriques. Le centre des sphères est appelé **foyer** de l'onde sphérique.

Formellement, le champ associé à une onde sphérique ne dépend spatialement que de $\vec{r} \cdot \vec{e}_r = r$, qui n'est autre que le rayon des coordonnées sphériques.

Remarque : Parler de « direction de propagation » d'une onde sphérique n'a aucun sens. Cela ne pourrait en avoir que localement ... ce qui revient à assimiler l'onde sphérique à une onde plane. Cette approximation locale en onde quasi-plane est très utilisée dans le cadre de l'optique ondulatoire, voir le cours d'optique d'Arnaud Le Diffon.

Dans le cas d'une onde sphérique, $\xi = \xi(r, t)$ et le laplacien tridimensionnel s'écrit de façon simple. Pour une onde sphérique, l'équation de d'Alembert s'écrit

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \xi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0, \quad (1.35)$$

qui n'est autre que l'équation de d'Alembert des ondes planes pour la variable $r \xi$. Les résultats du paragraphe précédent mènent alors directement à la conclusion :

Toute onde sphérique, solution de l'équation de d'Alembert à symétrie sphérique, peut s'écrire de façon générale sous la forme d'une superposition de deux ondes sphériques progressives :

$$\xi(r, t) = \frac{1}{r} [f(r - ct) + g(r + ct)] = \frac{1}{r} \left[\varphi\left(t - \frac{r}{c}\right) + \psi\left(t + \frac{r}{c}\right) \right]. \quad (1.36)$$

f et φ sont des ondes sphériques divergentes, alors que g et ψ sont des ondes sphériques convergentes.

Remarque : Le préfacteur $1/r$ est associé à la conservation de l'énergie au cours de la propagation, puisque l'onde sphérique s'étale dans l'espace.

Dans la suite de ce chapitre, le cas des seules ondes planes sera considéré, et nous illustrerons plusieurs de leurs propriétés. Nous verrons que par linéarité les seules ondes planes suffisent en fait à décrire une onde quelconque.

1.3 Relation de structure et impédance propagative

Nous avons présenté quelques solutions de l'équation d'onde pour *un seul* champ §1.2. Néanmoins, l'étude d'exemples a montré l'importance du couplage entre deux champs pour qu'un phénomène ondulatoire puisse exister, et on s'attend à ce que les deux grandeurs couplées soient reliées l'une à l'autre. Cherchons donc ladite relation entre les grandeurs couplées.

On appelle **relation de structure** d'une onde l'équation qui relie les grandeurs couplées l'une à l'autre.

Remarque : Les équations couplées telles qu'elles ont été introduites via les exemples ne sont pas la relation de structure, qui implique directement les grandeurs couplées et non pas leurs dérivées. En revanche, ce sont bien sûr les équations couplées qui permettent d'obtenir la relation de structure.

1.3.1 Cas de deux grandeurs couplées scalaires

Commençons par le cas le plus simple où les deux grandeurs couplées sont des champs scalaires. Considérons de nouveau un câble coaxial comme présenté p. 7, dans lequel est envoyé une OPP en courant,

$$i(x, t) = f(x - ct). \quad (1.37)$$

Cherchons la tension $u(x, t)$ pour une telle onde. Injectons cette solution dans l'équation de couplage issue de la loi des mailles :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} = \Lambda c f'(x - ct). \quad (1.38)$$

L'intégration par rapport à l'espace donne

$$u(x, t) = \Lambda c f(x - ct) + \phi(t), \quad (1.39)$$

où $\phi(t)$ est une fonction du temps seulement. Le fait que u et f soient des solutions de l'équation de d'Alembert impose à $\phi(t)$ d'en être solution également. Comme ϕ ne dépend que du temps, l'équation de d'Alembert s'écrit

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = 0. \quad (1.40)$$

Par conséquent, $\phi(t)$ est une fonction affine. Si la pente est non-nulle, cela conduit à une divergence non physique en $t \rightarrow \pm\infty$. La seule possibilité est donc que ϕ soit une fonction constante, ne décrivant pas une onde. On ne la prendra donc plus en compte par la suite.

Remarque : La constante en question n'est pas forcément nulle pour autant : dans le cas des ondes acoustiques dans les fluides, le champ de surpression $p_1(x, t)$ s'ajoute à la pression p_0 préexistant dans le fluide au repos.

Ainsi,

$$u(x, t) = Z i(x, t) \quad \text{avec} \quad Z = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}. \quad (1.41)$$

C'est la relation de structure de l'OPP se déplaçant dans le sens des x croissants dans le câble coaxial. Si on avait considéré une OPP se déplaçant dans le sens des x décroissants, $i(x, t) = g(x + ct)$ le même calcul aurait conduit à

$$u(x, t) = -Z i(x, t). \quad (1.42)$$

La relation de structure d'une onde plane progressive scalaire est une relation de proportionnalité.

Le coefficient de proportionnalité définit l'**impédance propagative** du milieu.

L'impédance propagative ne dépend que du milieu de propagation.

Remarque 1 : Dans le cas d'une propagation dispersive, l'impédance propagative peut aussi dépendre de la fréquence, mais seulement au travers de la fonction de réponse du milieu.

Remarque 2 : Bien qu'elles s'expriment toutes les deux en ohms, il ne faut pas confondre l'impédance propagative et l'impédance dissipative. En particulier, l'impédance propagative est une grandeur intensive, indépendante de la « taille » du milieu de propagation, alors qu'une impédance dissipative est extensive. Ces aspects sont détaillés dans le cours d'Adrien Licari qui leur est dédié.

Application numérique : Pour le câble coaxial considéré précédemment, on trouve $Z = 50 \Omega$, ce qui ne correspond heureusement pas à la résistance du câble. Cette valeur est en revanche intimement liée à celle de l'impédance de sortie d'un GBF, qui vaut aussi 50Ω .

Dans le cas général,

$$\begin{cases} i(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \\ u(x, t) = Z [f(x - ct) - g(x + ct)] \end{cases} \quad (1.43)$$

Les grandeurs couplées ne sont donc proportionnelles qu'en régime d'OPP, mais même dans le cas général d'une onde plane le seul paramètre intervenant dans la relation de structure est l'impédance propagative. Ainsi,

La célérité et l'impédance d'un milieu caractérisent intégralement le couplage entre grandeurs couplées.

En effet, ce dernier est donné par deux équations aux dérivées partielles, les équations couplées, faisant intervenir deux constantes de couplage. Si les équations couplées sont écrites sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} = \text{cte} \times \frac{\partial}{\partial x}, \quad (1.44)$$

le produit des constantes de couplage donne la célérité des ondes dans le milieu et leur quotient donne l'impédance propagative. Reste à savoir dans quel sens prendre le quotient. Le choix se fait sur la base « d'arguments » intuitifs, et l'impédance est définie en général comme le rapport de « la cause » sur « l'effet », ou encore de « la force » sur « le flux ».

1.3.2 Cas où une grandeur couplée au moins est vectorielle

Dans le cas où l'un des champs est vectoriel, la relation de structure est vectorielle également. Outre l'impédance propagative, elle peut faire intervenir le vecteur unitaire $\vec{n}$ donnant la direction de propagation.

Exemple : Onde acoustique dans un fluide

Les grandeurs couplées sont la surpression acoustique $p_1(x, t)$, qui est « la cause », et la vitesse acoustique $\vec{v}_1(x, t)$, qui est « l'effet ». Ces deux grandeurs sont couplées par la masse volumique du fluide au repos, ρ_0 , et par le coefficient de compressibilité isentropique du fluide au repos,

$$\chi_S = \frac{1}{\rho_0} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_S \quad (1.45)$$

La célérité des ondes acoustiques vaut

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}, \quad (1.46)$$

et la relation de structure d'une OPP s'écrit

$$p_1 \vec{n} = Z \vec{v}_1, \quad (1.47)$$

où l'impédance Z est donnée par

$$Z = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_S}} \quad (1.48)$$

Remarque : Faire intervenir explicitement le vecteur direction de propagation permet d'écrire la même relation de structure pour une OPP allant dans le sens croissant ou décroissant. En d'autres termes, cela permet de déterminer laquelle des deux relations (1.41) et (1.42) définit $+Z$ et laquelle définit $-Z$.

Exemple : Onde électromagnétique dans le vide illimité

On analyse usuellement les ondes électromagnétiques en stipulant que $\vec{E}$ en est la cause et $\vec{B}$, ou plutôt $\vec{H}$, la conséquence.

Remarque : On peut noter que c'est cohérent avec l'analyse du modèle électrocinétique du câble coaxial, où la tension est la cause.

On montre à partir des équations de Maxwell que les champs d'une OPP vérifient

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \wedge \vec{E} \quad (1.49)$$

Pour faire apparaître l'impédance propagative, il faut écrire différemment cette relation en la multipliant vectoriellement par $\vec{n}$:

$$(\vec{n} \wedge \vec{E}) \wedge \vec{n} = c \vec{B} \wedge \vec{n} \quad (1.50)$$

$$\vec{E} - (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{n} = \mu_0 c \vec{H} \wedge \vec{n} \quad (1.51)$$

$$\boxed{\vec{E} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \vec{H} \wedge \vec{n}} \quad (1.52)$$

où le passage à la dernière égalité utilise le caractère transverse des ondes électromagnétiques dans le vide illimité. L'impédance électromagnétique du vide est alors définie par

$$\boxed{Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377 \, \Omega.} \quad (1.53)$$

1.3.3 Interface entre deux milieux

Allons un peu plus loin dans le sens physique de l'impédance propagative. Lorsqu'une OPP rencontre une interface entre deux milieux, elle est partiellement réfléchiée et partiellement transmise.

Les coefficients de réflexion et de transmission à une interface ne dépendent que du rapport des impédances propagatives des deux milieux.

C'est pour cette raison que la maximisation de la transmission se fait par *adaptation d'impédance*. Il s'agit alors d'insérer un troisième milieu, d'impédance intermédiaire, entre les deux autres.

Par manque de temps, la transformation d'une onde à l'interface entre deux milieux n'est pas plus détaillée dans le cadre de ce cours. Je vous laisse le soin de faire vos propres révisions à ce sujet, par exemple à l'aide de livres de CPGE [1, 2] ou à partir du cours dédié à la notion d'impédance d'Adrien Licari.

Conclusion

Le couplage entre grandeurs couplées d'une onde est entièrement caractérisé par la donnée de sa célérité et de sa relation de structure, caractérisée par une seule grandeur caractéristique du milieu, l'impédance propagative.

Du point de vue d'une seule des grandeurs couplées, la célérité caractérise sa propagation dans un milieu *homogène* et l'impédance propagative la façon dont elle est transformée à une *interface* entre deux milieux.

1.4 Paquets d'ondes

1.4.1 L'outil onde plane progressive harmonique

Définition

Une **onde plane progressive harmonique**, ou **onde plane progressive sinusoïdale** est une onde plane progressive dont la dépendance en temps est sinusoïdale. Formellement, le champ associé à une OPPH s'écrit

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t + \phi). \quad (1.54)$$

$\vec{k} = k \vec{n}$ est le **vecteur d'onde** de l'OPPH.

Remarque 1 : La notion de vecteur d'onde n'a de sens **que pour une OPPH**. En particulier, parler du vecteur d'onde d'une onde plane ou d'une onde plane progressive « tout court » ne veut rien dire. C'est encore pire pour une onde sphérique.

Remarque 2 : Pour des raisons de sens physique, on choisit généralement de prendre $\omega > 0$ et k de signe quelconque. C'est alors le signe de k qui indique le sens de propagation de l'OPPH. Cependant choisir $k > 0$ et ω de signe quelconque conduirait aux mêmes résultats.

Remarque 3 : Dans l'écriture (1.54), k et ω sont des paramètres de l'OPPH qui sont donc fixés. Ce ne sont a priori pas des variables de Fourier (même si les notations sont « volontairement ambiguës »).

Relation de dispersion

L'expression (1.22) montre la **double périodicité** de l'OPPH, qui est périodique dans l'espace et dans le temps :

- ▷ la période spatiale d'une OPPH $\lambda = 2\pi/k$ est sa **longueur d'onde** ;
- ▷ la période temporelle d'une OPPH $T = 2\pi/\omega$ est souvent appelée simplement « période ».

Le couplage spatio-temporel imposé par l'équation de d'Alembert fait que les deux périodes ne sont pas indépendantes.

La **relation de dispersion** est la relation entre la période spatiale et la période temporelle d'une onde plane progressive harmonique. Elle caractérise la propagation, par opposition au couplage.

Formellement, c'est l'équation qui relie ω et k . C'est en général une relation implicite, faisant intervenir ω^2 et k^2 en raison des dérivées secondes. Elle s'obtient en injectant l'expression d'une OPPH dans l'équation de propagation.

En appliquant cette méthode à l'équation de d'Alembert, on trouve que sa relation de dispersion est la relation bien connue

$$\boxed{\omega^2 = k^2 c^2} . \quad (1.55)$$

🔴🔴🔴 **Attention !** Bien entendu, ceci n'est vrai *a priori* que pour l'équation de d'Alembert.

Insistons une fois de plus sur le fait que cette notion n'est bien définie que pour les OPPH. Parler de « relation de dispersion d'un milieu » sous-entend que l'on considère des OPPH. Parler de relation de dispersion d'une onde progressive quelconque ne veut rien dire.

Vitesse de phase

La phase de l'OPPH (1.54) se factorise sous la forme

$$\Phi = k \left(x - \frac{\omega}{k} t \right) + \phi . \quad (1.56)$$

Par comparaison avec l'équation (1.34) décrivant une onde plane comme somme d'ondes planes progressives, ω/k s'interprète comme la vitesse à laquelle se propage la phase de l'OPPH.

La **vitesse de phase** v_φ est la vitesse de propagation de la phase d'une onde plane progressive sinusoïdale. Mathématiquement,

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} . \quad (1.57)$$

La propagation est dite **dispersive** lorsque toutes les OPPH n'ont pas la même vitesse de phase. Formellement, cela se traduit par une dépendance de la vitesse de phase en la fréquence de l'OPPH, ce qui est équivalent à une relation de dispersion non-linéaire.

Pour l'équation de d'Alembert, d'après la relation de dispersion (1.55),

$$v_\varphi = \pm c , \quad (1.58)$$

signe que la propagation n'est pas dispersive. Remarquons que ce résultat est cohérent avec le fait qu'une OPPH est une OPP, qui doit donc se propager avec la célérité c intervenant dans l'équation de d'Alembert.

Remarque : Le fait que la vitesse de phase soit définie algébriquement ou comme une norme (donc positive) n'est qu'une convention qui varie d'un auteur à l'autre, voire d'un paragraphe à l'autre ...

Caractère non-physique et intérêt de l'OPPH

Une OPPH ne peut pas décrire une onde physique réaliste, car elle est d'extension spatiale et temporelle infinie, et possède donc une énergie infinie. C'est néanmoins un outil mathématique essentiel grâce à l'analyse de Fourier, car les « OPPH » constituent la **base de Fourier**, sur laquelle on peut décomposer une onde quelconque.

Les OPPH forment une base des solutions de l'équation de d'Alembert.

Autrement dit, il est toujours pertinent de rechercher des solutions sous forme d'OPPH, puisque ces solutions, *a priori* particulières, donnent accès à l'ensemble des solutions par combinaison linéaire.

1.4.2 Paquet d'onde à une dimension

Construction d'un paquet d'onde [3, §21.1]

Un signal réel quelconque s'écrit en toute généralité

$$\xi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{\xi}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)} . \quad (1.59)$$

Un tel signal $\xi(x, t)$ est donc une combinaison linéaire de signaux sinusoïdaux, pondérés par le coefficient complexe $\tilde{\xi}(k, \omega)$, qui est la **transformée de Fourier** de $\xi(x, t)$.

Notons qu'ici $\xi(x, t)$ est nommé *signal* et non pas *onde* : rien ne dit *a priori* que ξ défini équation (1.59) est solution de l'équation de propagation. L'équation de d'Alembert étant linéaire, ce n'est le cas **que** si chacun des signaux sinusoïdaux impliqués est une OPPH, c'est-à-dire que si k et ω vérifient la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$. Ainsi, une onde (quelconque) s'écrit

$$\xi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{\xi}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)} \delta(\omega - \omega(k)). \quad (1.60)$$

*** **Attention !** Les notations peuvent paraître ambiguës : ω est une variable de Fourier, alors que $\omega(k)$ est la relation de dispersion, issue de l'équation de propagation. Il serait ici plus clair d'écrire cette dernière $\omega = f(k)$, et d'écrire l'argument de la distribution de Dirac sous la forme $\omega - f(k)$... ce que je ne fais pas pour être cohérent avec la suite où la notation $\omega(k)$ devient plus explicite.

La distribution de Dirac permet de procéder à l'intégration sur ω , ce qui conduit à

$$\xi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{\xi}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \quad (1.61)$$

où $\hat{\xi}(k) = \tilde{\xi}[k, \omega(k)]$ est une fonction de la seule variable k à valeurs *a priori* complexes.

Un **paquet d'ondes** est une combinaison linéaire continue d'ondes planes progressives harmoniques dont les fréquences spatiales k et temporelles ω sont reliées par la relation de dispersion.

Insistons sur le fait qu'il est crucial de sommer les OPPH de façon continue et non pas discrète. En effet, la TF d'une fonction à spectre discret est une fonction périodique (techniquement, un spectre discret définit une série de Fourier), qui reste d'extension spatio-temporelle infinie.

Un paquet d'ondes physique possède un spectre de Fourier continu.

On peut proposer une lecture interférentielle de l'expression du paquet d'onde. Le paquet d'onde complet est alors issu de l'interférence d'un nombre infini d'OPPH cohérentes, chaque OPPH contribuant au paquet par l'amplitude $\hat{\xi}(k)$.

Complément : Inégalité d'Heisenberg [6, §14.3]

L'écriture du paquet d'onde comme une transformée de Fourier contraint son extension dans l'espace réel et l'espace de Fourier, car cela lui impose d'obéir à l'inégalité d'Heisenberg, qui stipule que

$$\Delta X_\xi \Delta K_\xi \geq \frac{1}{2}. \quad (1.62)$$

Dans cette expression, ΔX_ξ (qui peut dépendre de t) et ΔK_ξ (qui lui n'en dépend pas) sont les écarts types du module carré du paquet d'onde. Par exemple, ΔK_ξ est défini à partir du jeu d'égalités

$$\langle K_\xi \rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} k |\hat{\xi}(k)|^2 \quad ; \quad \langle K_\xi^2 \rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} k^2 |\hat{\xi}(k)|^2 \quad (1.63)$$

$$\Delta K_\xi^2 = \langle K_\xi^2 \rangle - \langle K_\xi \rangle^2 \quad (1.64)$$

où

$$\mathcal{N} \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} |\hat{\xi}(k)|^2 \quad (1.65)$$

est la norme du paquet d'ondes, reliée à l'énergie totale qu'il transporte. L'inégalité d'Heisenberg ne contraint pas l'éventuel étalement du paquet d'onde que nous étudierons au chapitre 2, puisqu'elle ne fixe qu'une borne inférieure à sa largeur.

Variable privilégiée

La contrainte liée à la relation de dispersion permet d'éliminer une variable de l'intégrale de Fourier, mais laisse le choix entre privilégier k ou ω .

Ici, l'intégration a été faite sur les pulsations au profit des vecteurs d'onde. Privilégier ω pose en effet des problèmes d'interprétation : quel sens physique donner aux pulsations négatives ? Comment bien distinguer le sens de propagation des OPP ? Garder k est donc *a priori* plus simple de ce point de vue.

Ce n'est cependant pas toujours le meilleur choix. En particulier, lors d'un changement de milieu, la quantité conservée est la pulsation et non pas le vecteur d'onde. Un problème se pose également en présence d'atténuation, où le nombre d'onde k prend des valeurs complexes, comme nous le verrons au chapitre 2. Dans ces cas là, il est préférable de privilégier la pulsation comme variable de description du paquet d'ondes.

Complément : Hermiticité, signal analytique

Le champ $\xi(x, t)$ est à valeurs réelles, donc sa transformée de Fourier est **hermitique**, c'est-à-dire

$$\tilde{\xi}(-k, -\omega) = \tilde{\xi}^*(k, \omega) \quad (1.66)$$

Dans le plan (ω, k) , représenté figure 1.5, il y a donc redondance entre les quadrants $(\omega > 0, k > 0)$ et $(\omega < 0, k < 0)$ d'une part ; et $(\omega > 0, k < 0)$ et $(\omega < 0, k > 0)$ d'autre part.

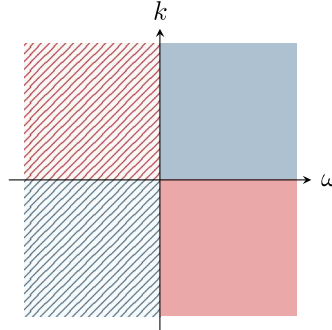


Fig. 1.5 – Schéma du plan de Fourier. Les deux quadrants rouges, $(\omega > 0, k < 0)$ et $(\omega < 0, k > 0)$, d'une part, et les deux quadrants bleus, $(\omega > 0, k > 0)$ et $(\omega < 0, k < 0)$, d'autre part, portent une information redondante. On peut donc se contenter du demi-plan droit, en couleurs pleines, pour décrire complètement le paquet d'onde. Cela revient à définir un signal analytique.

Tant qu'aucune atténuation n'entre en jeu, k est toujours réel, et on peut considérer $\omega(k) > 0$ pour tout k sans perdre d'information. Notons que ce n'est *a priori* pas évident puisque la relation de dispersion relie ω^2 à k^2 sans fournir d'information sur le signe de ces deux grandeurs. Cela a l'avantage de rendre transparente l'interprétation en OPPH. En contrepartie, $\hat{\xi}(k)$ n'a pas de propriété de symétrie sous le changement de variable $k \rightarrow -k$. En ne gardant que le demi-plan de Fourier $\omega > 0$, on définit un **signal analytique**, qui n'est autre que la fameuse « représentation complexe » largement utilisée par les physiciens. Le lecteur intéressé par la construction et les propriétés mathématiques d'un signal analytique pourra se reporter à l'ouvrage de W. Appel [6, §14.4].

Malgré tout, reconstruire le paquet d'ondes réel nécessite le plan de Fourier entier, et pas seulement la moitié $\omega > 0$. La propriété d'hermiticité permet d'en tenir compte à l'aide d'une partie réelle.

Ainsi, la façon la plus exacte d'écrire un paquet d'onde réel n'est pas (1.61), mais plutôt

$$\xi(x, t) = 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{\xi}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)}, \quad \text{avec } \omega(k) > 0. \quad (1.67)$$

Extension à trois dimensions

La méthode utilisée ici s'étend sans difficulté au cas tridimensionnel. La relation de dispersion n'apporte toujours qu'une contrainte scalaire, et s'écrit formellement

$$\omega = \omega(\vec{k}) = \omega(k_x, k_y, k_z). \quad (1.68)$$

Elle ne permet donc de s'affranchir que d'une seule variable, disons ici la pulsation ω . Le paquet d'ondes met alors en jeu une intégrale triple,

$$\xi(\vec{r}, t) = 2 \operatorname{Re} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \hat{\xi}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(\vec{k})t)}, \quad \text{avec } \omega(\vec{k}) > 0. \quad (1.69)$$

L'intégrale triple sur les composantes de $\vec{k}$ peut alors être menée dans n'importe quel système de coordonnées, par exemple cartésiennes k_x, k_y, k_z ou sphériques k, θ_k, φ_k .

1.4.3 Propagation d'un paquet d'ondes**Enveloppe, vitesse de groupe [3, §21]**

Étudions maintenant la façon dont un tel paquet d'ondes se propage. Pour faciliter l'interprétation des équations, considérons un paquet d'ondes se propageant dans une direction bien définie. Pour cela, on le suppose tel que $\hat{\xi}(k)$ ne prend des valeurs non-nulles que dans l'intervalle $[k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k]$ avec $k_0 > 0$ et $\Delta k \ll k_0$.

Faisons ensuite un « développement limité » de la relation de dispersion autour de $k = k_0$:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0} (k - k_0) + \mathcal{O}((k - k_0)^2) . \quad (1.70)$$

Dans le cas où la relation de dispersion est celle de l'équation de d'Alembert, $d\omega/dk = c$ quel que soit k_0 et le développement à l'ordre 1 est exact. Utiliser un développement limité a l'intérêt d'être la méthode générale pour traiter la propagation d'un paquet d'onde en présence de dispersion, comme nous le ferons §2.3, c'est pourquoi on l'utilise dès maintenant.

Injectons ce développement dans l'expression complexe du paquet d'ondes (1.67). Pour simplifier les notations, on note le paquet complexe $\xi(x, t)$ de la même façon que le paquet lui-même.

$$\xi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{\xi}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \quad (1.71)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{\xi}(k) \exp i \left[k_0 x + (k - k_0)x - \omega(k_0)t - \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0} (k - k_0)t \right] \quad (1.72)$$

De plus, $\hat{\xi}(k)$ est *a priori* complexe et on peut également en développer la phase au premier ordre en $(k - k_0)$:

$$\hat{\xi}(k) = |\hat{\xi}(k)| e^{i\phi(k_0)} e^{i\phi'(k_0)(k - k_0)} \quad (1.73)$$

Il apparaît alors une factorisation, les termes en k_0 pouvant être sortis de l'intégrale

$$\xi(x, t) = \exp i [k_0 x - \omega(k_0)t + \phi(k_0)] \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} |\hat{\xi}(k)| e^{i\phi'(k_0)(k - k_0)} \exp i \left[(k - k_0)x - \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0} (k - k_0)t \right] \quad (1.74)$$

Changeons maintenant de variable, et posons $\delta k = k - k_0$ et $\hat{\xi}_e(\delta k) = |\hat{\xi}(k_0 + \delta k)| e^{i\phi'(k_0)\delta k}$. Alors,

$$\xi(x, t) = \exp i [k_0 x - \omega(k_0)t + \phi(k_0)] \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\delta k}{2\pi} \hat{\xi}_e(\delta k) \exp i \left[\delta k \left(x - \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0} t \right) \right] \quad (1.75)$$

L'intégrale est alors la transformée de Fourier (réciproque) de la fonction $\hat{\xi}_e(\delta k)$, prise en $x - (d\omega/dk)|_{k_0}t$. Il vient donc

$$\xi(x, t) = \xi_e \left(x - \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0} t \right) \exp i [k_0 x - \omega(k_0)t + \phi(k_0)] \quad (1.76)$$

Un paquet d'ondes est constitué du produit d'une **onde porteuse** modulée par une **enveloppe** ξ_e .

L'onde porteuse se propage à la **vitesse de phase** prise au nombre d'onde central du paquet,

$$v_\varphi = \frac{\omega(k_0)}{k_0} , \quad (1.77)$$

alors que l'enveloppe se propage à la **vitesse de groupe** prise au nombre d'onde central du paquet,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k_0} . \quad (1.78)$$

La vitesse de groupe provient du développement de la relation de dispersion au **premier ordre** autour du nombre d'onde central du paquet. C'est cette vitesse que l'on associe intuitivement au déplacement d'un paquet d'ondes. On l'obtient par exemple par des mesures de temps de vol d'impulsions. La structure d'un paquet d'onde et sa dynamique régies par l'équation de d'Alembert sont représentées figure 1.6.

Remarque 1 : Il est important de remarquer qu'en général $v_\varphi \neq v_g$. L'égalité est atteinte en particulier lorsque l'équation de propagation est l'équation de d'Alembert, $v_\varphi = v_g = c$. Dans ce cas, $\xi(x, t)$ est bien une OPP en tant que fonction de la seule variable $x - ct$.

Remarque 2 : Maintenant que le résultat a été interprété, revenons sur l'introduction de l'enveloppe par $\hat{\xi}_e(\delta k) = |\hat{\xi}(k_0 + \delta k)| e^{i\phi'(k_0)\delta k}$. Cela traduit mathématiquement le fait que $\hat{\xi}$ décrit un paquet qui avance, et est donc maximal en $k = k_0 \neq 0$, alors que $\hat{\xi}_e$ décrit une enveloppe, qui est donc statique et est maximale en $\delta k = 0$.

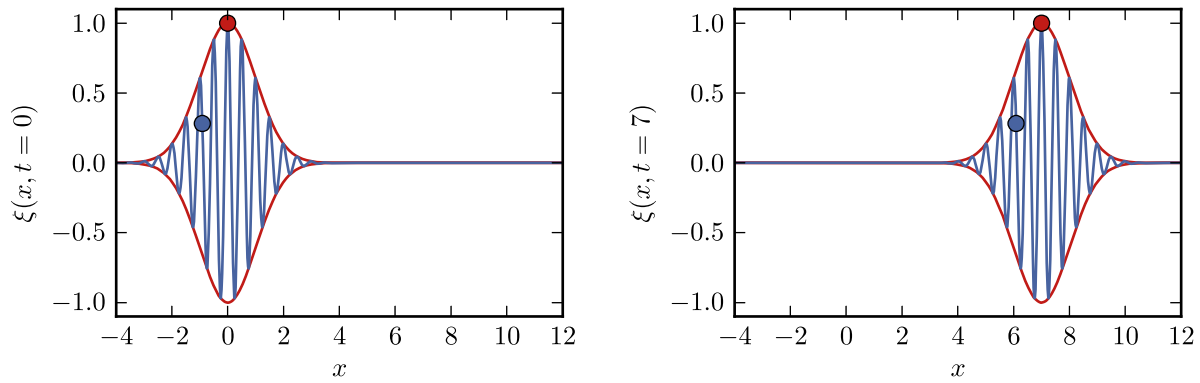


Fig. 1.6 – Propagation d'un paquet d'onde solution de l'équation de d'Alembert. Un paquet d'onde, en bleu, se compose d'une enveloppe, en rouge, modulée par une porteuse. Ici, la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont égales et valent 1 par choix d'unités. Ainsi le point bleu, lié à la porteuse, se déplace à la même vitesse que le point rouge, lié à l'enveloppe. Le paquet d'onde représenté est gaussien, d'écart type 1, et la porteuse a pour longueur d'onde 0.5.

Position du centre du paquet d'ondes

Le centre du paquet d'onde est obtenu lorsque toutes les contributions définissant ξ_c dans l'équation (1.75) interfèrent constructivement, ou en d'autres termes lorsque chaque terme de phase pour chaque δk vaut 1. À l'instant t , cette condition est obtenue en $x_c = x_c(t)$ tel que pour tout δk ,

$$\delta k [\phi'(k_0) + x_c - v_g t] = 2p\pi, \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (1.79)$$

Cette condition devant être vraie pour tout δk , qui est une variable continue, la seule façon de la réaliser est d'avoir

$$\phi'(k_0) + x_c - v_g t = 0, \quad (1.80)$$

soit

$$x_c(t) = v_g t - \phi'(k_0). \quad (1.81)$$

On trouve comme attendu que le centre du paquet d'ondes se déplace à la vitesse de groupe. Attention à ne pas oublier la phase $\phi'(k_0)$, qui s'interprète comme la position du paquet d'ondes à $t = 0$.

Remarque : On retrouve ici le résultat connu qu'une modulation $e^{i\phi'(k_0)\delta k}$ dans l'espace de Fourier se traduit par une translation dans l'espace réel [6, §11.2].

Remarquons que le « maximum » trouvé ici est celui de la fonction d'enveloppe, qui n'est pas forcément un maximum du paquet d'ondes complet. En effet, la phase commune à toutes les ondes n'est pas forcément un multiple de 2π , car il reste la phase moyenne, celle de la porteuse.

Méthode de la phase stationnaire [9, §7.11]

Ce dernier résultat peut se retrouver par une méthode équivalente mais plus directe, ne nécessitant pas la décomposition porteuse-enveloppe. Revenons à l'expression définissant le (l'écriture complexe du) paquet d'ondes, équation (1.67),

$$\xi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \left| \hat{\xi}(k) \right| e^{i\phi(k)} e^{i(kx - \omega(k)t)} \quad (1.82)$$

Si le paquet d'onde est suffisamment étroit spatialement, la bande Δk de nombres d'ondes y contribuant de façon significative est suffisamment large pour supposer raisonnablement que $\hat{\xi}(k)$ varie beaucoup plus lentement avec k que le terme de phase global $\exp i[kx - \omega(k)t]$.

Remarque : Physiquement, cela signifie que le paquet d'onde est bien défini, très loin d'une onde quasi-harmonique (pour laquelle parler du « centre » n'a d'ailleurs pas grand sens). L'approximation faite ici est l'opposée de l'approximation de l'enveloppe lentement variable utilisée pour décrire la cohérence en optique ondulatoire.

Le centre du paquet d'onde se trouve alors en $x_c = x_c(t)$ qui est tel que toutes les composantes de Fourier y interfèrent en phase. En d'autres termes, x_c est tel que la phase globale n'y dépende pas de k , ce qui se traduit mathématiquement au premier ordre par

$$\left. \frac{\partial}{\partial k} [kx - \omega(k)t + \phi(k)] \right|_{x=x_c} = 0, \quad (1.83)$$

ce qui conduit à

$$x_c = \frac{d\omega}{dk} t - \phi'(k), \quad (1.84)$$

mais x_c y est toujours une fonction de k , ce qui n'a pas de sens.

Si le milieu est suffisamment peu dispersif à l'échelle de Δk , ce qui est évident pour l'équation de d'Alembert, il est légitime de considérer que dans cette bande de nombre d'ondes,

$$\frac{d\omega}{dk} \simeq \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}. \quad (1.85)$$

De plus, si $\hat{\xi}(k)$ varie lentement avec k , on peut supposer que sa phase varie au pire linéairement avec δk , et prendre alors

$$\phi'(k) \simeq \phi'(k_0), \quad (1.86)$$

ce qui donne de nouveau le résultat précédent.

1.5 Ondes stationnaires

1.5.1 Définition et propriétés

Une **onde stationnaire** est une onde dont les dépendances spatiale et temporelle sont découplées. Formellement, le champ d'une onde (plane) stationnaire s'écrit

$$\xi(x, t) = f(x) \times g(t). \quad (1.87)$$

Cherchons les ondes stationnaires (abrégées OS par la suite) solutions de l'équation de d'Alembert,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0, \quad (1.88)$$

en y injectant (1.87), ce qui donne

$$f''(x) g(t) - \frac{1}{c^2} g''(t) f(x) = 0, \quad (1.89)$$

soit

$$c^2 \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(t)}{g(t)}. \quad (1.90)$$

Or dans cette égalité les variables temps et espace sont *séparées*, ce qui implique que chacun des termes est en fait constant. Si cette constante est positive ou nulle, on obtient une solution divergente en temps qui n'est pas physiquement possible. Par conséquent, elle est négative et on la nomme $-\omega^2$. Chaque membre donne alors lieu à une équation différentielle à une variable, du type oscillateur harmonique, d'où

$$\begin{cases} g(t) = g_0 \cos(\omega t + \phi) \\ f(x) = f_0 \cos\left(\frac{\omega}{c} x + \phi'\right) \end{cases} \quad (1.91)$$

et enfin

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cos(\omega t + \phi) \cos(kx + \phi'), \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (1.92)$$

Notons qu'ainsi défini k vérifie la relation de dispersion, ce qui n'est *a priori* pas évident.

💣💣💣 **Attention !** k est un « nombre d'onde », mais on ne peut pas en faire un vecteur d'onde car une onde stationnaire n'a pas de direction de propagation.

Une OS possède également une **double périodicité**, mais dans un sens différent de la double périodicité d'une OPPH. Elle donne lieu à des **nœuds** et des **ventres** de vibration, points où l'amplitude des oscillations est respectivement nulle et maximale.

Développons le produit des cosinus dans l'équation (1.92) :

$$\xi(x, t) = \frac{1}{2} \xi_0 [\cos(\omega t + \phi + kx + \phi') + \cos(\omega t + \phi - kx - \phi')] \quad (1.93)$$

Ainsi, une OS est la somme de deux OPPH de même amplitude, déphasées et se propageant dans des sens opposés.

Remarque : La pulsation ω et le nombre d'onde k intervenant dans l'OS sont aussi ceux qui interviennent dans l'OPPH. Il est donc logique qu'ils vérifient la relation de dispersion.

Plus intéressant, développons le cosinus de l'expression d'une OPPH :

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cos(\omega t - kx + \phi) \quad (1.94)$$

$$= \xi_0 [\cos(\omega t + \phi) \cos(kx) - \sin(\omega t + \phi) \sin(-kx)] \quad (1.95)$$

$$\xi(x, t) = \xi_0 \left[\cos(\omega t + \phi) \cos(kx) + \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) \right]. \quad (1.96)$$

Ainsi, une OPPH s'écrit comme la somme de deux OS. Et comme les OPPH forment une base des solutions de l'équation de d'Alembert, on en déduit le résultat suivant :

Les ondes stationnaires forment une base des solutions de l'équation de d'Alembert, *i.e.* toute solution de l'équation de d'Alembert peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'OS.

Dès que les conditions aux limites imposent un nœud de vibration, il est naturel de chercher une solution sous forme d'onde stationnaire, et cela assure de pouvoir reconstruire toutes les solutions par combinaison linéaire.

1.5.2 Oscillations libres d'une corde de Melde

Rappels

Une **corde de Melde** est une corde vibrante dont les deux extrémités sont fixes.

Rappelons qu'une corde vibrante a pour grandeurs couplées la vitesse de déplacement vertical de la corde, $\partial \xi / \partial t$, et la composante verticale de la tension, T_z [2, §13.5]. Les constantes de couplage sont la masse linéique μ de la corde et l'inverse de sa tension au repos, $1/T_0$.

L'ébranlement $\xi(x, t)$ de la corde obéit alors à l'équation de d'Alembert, de célérité $c = \sqrt{T_0/\mu}$.

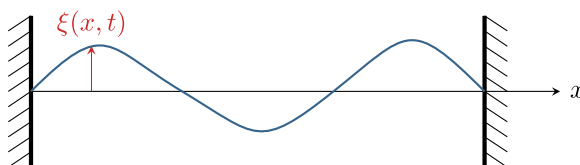


Fig. 1.7 – Corde de Melde. Une corde de Melde, fixée à ses deux extrémités, est décrite par l'ébranlement $\xi(x, t)$.

Modes propres

Les conditions aux limites imposent un ébranlement nul aux deux extrémités de la corde. Pour trouver l'ébranlement des oscillations libres d'une corde de Melde, il est donc logique de chercher des solutions parmi les ondes stationnaires, et de trouver lesquelles sont compatibles avec les conditions aux limites. Ces solutions sont les **modes propres** de la corde.

Un **mode** d'un système physique est une solution des équations du mouvement, compatible avec les conditions aux limites, et dont la dépendance en temps est harmonique.

La nature précise des modes dépend de la nature des conditions aux limites. Dans le cas de conditions aux limites imposées dans la direction de propagation, par exemple pour la corde de Melde, les modes sont des **ondes stationnaires** appelées **modes propres**. En revanche, lorsque les conditions aux limites sont transverses à la direction de propagation, ce qui est le cas des guides d'ondes que nous étudierons chapitre 3, les modes ont une **structure mixte** et conservent une partie progressive. Dans ce dernier cas, pour mettre l'accent sur cette différence, on ne parle plus de « modes propres », mais simplement de « modes », voire de **modes de propagation**.

Remarque 1 : La notion de mode d'un système physique est une notion extrêmement générale, qui dépasse largement le cadre de la physique des ondes. Penser par exemples aux modes propres d'un système d'oscillateurs couplés, aux modes propres d'un puits quantique (qu'on appelle plutôt états propres), etc. Un système physique possède autant de modes qu'il a de degrés de liberté : un oscillateur masse-ressort a un mode propre, un système de deux pendules couplés en a deux, etc. Une corde de Melde, en tant que système continu, possède donc une infinité de modes propres.

Remarque 2 : Les fonctions définissant les modes forment une famille de fonctions orthonormée, au sens du produit scalaire des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, d'où la dénomination de modes normaux qu'on leur donne également.

Remarque 3 : Insistons sur le fait que la notion de mode est définie en régime libre. Nul besoin que les oscillations du système soient forcées !

Le fait d'avoir des conditions aux limites implique de façon systématique une **discrétisation des modes** : le système sélectionne certaines longueurs d'onde, celles qui placent les nœuds et les ventres de vibration aux bons endroits.

Remarque : Cette discrétisation n'est « inattendue » que pour un système continu.

Cherchons donc les modes propres d'une corde de Melde, en cherchant $\xi(x, t)$ sous la forme d'une OS,

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cos(\omega t + \phi) \cos(kx + \phi') . \quad (1.97)$$

Les conditions aux limites s'écrivent pour tout t

$$\xi(x = 0, t) = \xi(x = L, t) = 0 , \quad (1.98)$$

d'où

▷ $\cos \phi' = 0$, et donc $\phi' = \pm \pi/2$;

▷ $\cos(kL \pm \pi/2) = \mp \sin(kL) = 0$, donc $kL = n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Les solutions à $k < 0$ étant équivalentes à des solutions à $k > 0$,

Les modes propres de la corde de Melde sont quantifiés par

$$k_n = n \frac{\pi}{L}, n \in \mathbb{N} \quad \Longleftrightarrow \quad L = n \frac{\lambda_n}{2}, n \in \mathbb{N} \quad (1.99)$$

La longueur de la corde contient un nombre entier de demi longueur d'onde du mode considéré.

La pulsation ω dépend également de n en raison de la relation de dispersion :

$$\omega_n = k_n c = n \frac{\pi}{L} c = n \omega_1 . \quad (1.100)$$

Remarque : La condition de quantification sur les longueurs d'onde est universelle pour des systèmes physiques de ce type. En revanche, avoir $\omega_n \propto n$ est seulement une propriété de l'équation de d'Alembert des ondes planes. Penser par exemple à la condition de quantification dans un puits quantique carré infini, où

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \quad \text{mais} \quad E_n = \hbar \omega_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 . \quad (1.101)$$

Ainsi, l'ébranlement de la corde dans le mode propre n vaut

$$\xi_n(x, t) = \xi_{0,n} \cos(n \omega_1 t + \phi_n) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) . \quad (1.102)$$

En toute généralité, l'ébranlement d'une oscillation libre de la corde s'écrit comme une combinaison linéaire des modes propres,

$$\xi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_{0,n} \cos(n \omega_1 t + \phi_n) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \quad (1.103)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} [A_n \cos(n \omega_1 t) + B_n \sin(n \omega_1 t)] \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) . \quad (1.104)$$

Remarque 1 : Ceci n'est **pas** une onde stationnaire, puisque l'espace et le temps n'y sont pas découplés.

Remarque 2 : Ce résultat est parfaitement naturel : les OS forment une base des solutions, et les modes propres représentent par définition l'ensemble des OS qui vérifient les conditions aux limites ... qui s'imposent également à toute onde existant dans le système.

Les coefficients A_n et B_n s'obtiennent à partir des conditions initiales, qui s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} \xi(x, t=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \omega_1 B_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \end{cases} \quad (1.105)$$

A_n et B_n s'identifient donc aux **coefficients du développement en série de Fourier** des fonctions définissant les conditions initiales. Ainsi,

$$\begin{cases} A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \xi(x, t=0) dx \\ B_n = \frac{1}{n\pi c} \int_{-L}^{+L} \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t=0) dx \end{cases} \quad (1.106)$$

Pour être dans le cadre mathématique exact des séries de Fourier [6, §10.4], il est nécessaire de prolonger les fonctions $\xi(x, t=0)$ et $\partial \xi / \partial t(x, t=0)$ comme représenté figure 1.8, à savoir

- ▷ par imparité, car le développement de Fourier ne contient que des sinus ;
- ▷ par périodicité, de période $2L$.

Comme le développement se fait sur les fonctions trigonométriques et pas sur les exponentielles complexes, des facteurs 2 apparaissent : le préfacteur de l'intégrale définissant A_n est en fait $2/2L$ alors que celui de l'intégrale donnant B_n vaut $(2/2L) \times (L/n\pi c)$.

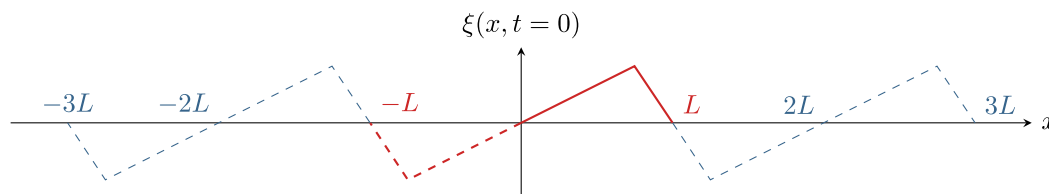


Fig. 1.8 – Forme initiale imposée à une corde. La corde réelle est située entre $x=0$ et $x=L$, représentée en traits pleins rouges. On lui a ici donnée une forme de type corde pincée, par exemple une corde de guitare ou de harpe. Elle est ensuite mathématiquement étendue par imparité, en traits pointillés rouge. Enfin, elle est périodisée, de période $2L$, en traits pointillés bleus.

Analyse énergétique [2, §13.6] [10, §1.2]

Rappelons d'abord l'expression de la densité linéique d'énergie d'une corde vibrante,

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2. \quad (1.107)$$

Le premier terme est une énergie cinétique, alors que le second est une énergie potentielle élastique. μ est la masse linéique de la corde et T_0 sa tension au repos. La célérité des ondes le long de la corde vaut $c = \sqrt{T_0/\mu}$.

Calculons l'énergie de la corde lorsqu'elle est dans un mode propre

$$\xi_n(x, t) = \xi_{0,n} \cos(\omega_n t + \phi_n) \sin(k_n x). \quad (1.108)$$

Les deux carrés intervenant dans les densités linéiques d'énergie valent alors

$$\left(\frac{\partial \xi_n}{\partial t} \right)^2 = \xi_{0,n}^2 \omega_n^2 \sin^2(\omega_n t + \phi_n) \sin^2(k_n x) \quad (1.109)$$

$$\left(\frac{\partial \xi_n}{\partial x} \right)^2 = \xi_{0,n}^2 k_n^2 \cos^2(\omega_n t + \phi_n) \cos^2(k_n x) \quad (1.110)$$

ce qui permet d'obtenir l'énergie totale comme

$$E_n(t) = \int_0^L \varepsilon_n(x, t) dx. \quad (1.111)$$

Or $k_n = n\pi/L$, donc

$$\int_0^L \sin^2(k_n x) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[1 - \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) \right] dx = \frac{L}{2}, \quad (1.112)$$

puisque le cosinus est intégré sur un nombre entier de périodes. Ainsi,

$$E_n(t) = \xi_{0,n}^2 \left[\frac{1}{4} \mu \omega_n^2 \sin^2(\omega_n t + \phi_n) + \frac{1}{4} T_0 k_n^2 \cos^2(\omega_n t + \phi_n) \right] \quad (1.113)$$

Or la célérité des ondes d'ébranlement de la corde est $c = \sqrt{T_0/\mu}$ et la relation de dispersion s'écrit $\omega^2 = k^2 c^2$, donc

$$\mu \omega_n^2 = T_0 k_n^2 \quad (1.114)$$

et ainsi

$$E_n = \frac{1}{4} \xi_{0,n}^2 T_0 k_n^2 \quad (1.115)$$

$$E_n = \frac{n^2 T_0 \pi^2}{4 L} \xi_{0,n}^2. \quad (1.116)$$

L'énergie E_n ne dépend donc pas du temps!

Sans apport d'énergie ni processus dissipatif, l'énergie d'un mode propre de la corde ne varie pas au cours du temps.

Dans le cas général où $\xi(x, t)$ est une combinaison linéaire de modes propres, on montre que l'énergie totale de la corde est la somme des énergies de chacun des modes propres. La démonstration implique le caractère orthogonal de deux modes propres différents, qui forment bien des modes *normaux*.

L'énergie totale des oscillations libres de la corde de Melde est la somme des énergies injectées dans chaque mode par les conditions initiales, sans qu'il n'y ait de réorganisation ultérieure de l'énergie entre les modes.

1.5.3 Oscillations forcées d'une corde de Melde

Forçons maintenant l'extrémité de la corde située en $x = 0$ à osciller à une pulsation ω_0 fixée de l'extérieur. Les nouvelles conditions aux limites s'écrivent à tout instant t

$$\begin{cases} \xi(x = 0, t) = A \cos(\omega_0 t) \\ \xi(x = L, t) = 0 \end{cases} \quad (1.117)$$

Puisque les conditions aux limites imposent un nœud de vibration, cherchons une solution en onde stationnaire qui vérifie les conditions aux limites,

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cos(\omega t + \phi) \cos(kx + \phi'). \quad (1.118)$$

Cette solution devant vérifier la relation de dispersion, qui n'est pas modifiée par les conditions aux limites, on sait d'emblée que $k = \omega/c$.

Exploitions maintenant les conditions aux limites. Commençons par $x = 0$, où à tout instant

$$\xi_0 \cos(\omega t + \phi) \cos \phi' = A \cos(\omega_0 t), \quad (1.119)$$

d'où

$$\omega = \omega_0, \quad \phi = 0 \quad \text{et} \quad \xi_0 \cos \phi' = A. \quad (1.120)$$

Remarquons donc que la pulsation de l'onde stationnaire est forcément la pulsation de forçage, que celle-ci soit celle d'un mode propre ou non. Ainsi, une pulsation qui ne pourrait pas donner d'oscillation libre peut être forcée dans le système. Pour insister sur le rôle du forçage, on notera par la suite $k = k_0 = \omega_0/c$. À l'autre extrémité de la corde, en $x = L$, on a

$$\cos(k_0 L + \phi') = 0, \quad (1.121)$$

soit

$$k_0 L + \phi' = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi, n \in \mathbb{Z}, \quad \text{d'où} \quad \phi' = -k_0 L + \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi, n \in \mathbb{Z}, \quad (1.122)$$

et donc

$$\cos(k_0 x + \phi') = \cos \left[k_0 (x - L) + n\pi + \frac{\pi}{2} \right] = (-1)^n \sin [k_0 (L - x)]. \quad (1.123)$$

En appliquant ce résultat en $x = 0$, on note que

$$\cos \phi' = (-1)^n \sin(k_0 L). \quad (1.124)$$

Ainsi, on déduit de (1.120) que

$$\xi_0 = \frac{A}{\cos \phi'} = \frac{A}{(-1)^n \sin(k_0 L)}, \quad (1.125)$$

ce qui permet finalement d'écrire la solution

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega_0 t) \frac{\sin[k_0(L - x)]}{\sin(k_0 L)}. \quad (1.126)$$

Lorsque $k_0 L = n\pi, n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire lorsque la fréquence de forçage ω_0 correspond à une fréquence propre $n\omega_1$ de la corde, la corde est en **résonance**. D'après le calcul, l'amplitude des oscillations tendrait alors vers l'infini. Toutefois, des phénomènes dissipatifs et des non-linéarités dans le comportement de la corde qui n'ont pas été pris en compte ici empêchent cette incongruité physique. Ce résultat est toutefois très général :

Un système physique entre en résonance lorsqu'il est excité à une fréquence égale à l'une des ses fréquences propres.

Remarque : Il est important de bien comprendre que la résonance est une notion relative à des oscillations forcées, alors que les modes propres sont eux relatifs à des oscillations libres. On voit ici apparaître la correspondance entre ces deux types d'oscillations, qui sont au premier abord différents.

Ces résultats peuvent être interprétés en termes énergétiques. À la résonance, l'excitateur transmet de l'énergie à l'oscillateur qui est en mesure de la stocker puisque la fréquence correspond à celle d'un mode propre. L'énergie totale accumulée finit alors par diverger, ce qui donne lieu à la résonance. Hors de la résonance, le système n'est pas en mesure de conserver l'énergie. Ainsi, après un certain temps caractéristique, l'énergie est renvoyée de l'oscillateur vers l'excitateur. On retrouve alors la caractérisation énergétique de la résonance :

Il y a résonance lorsque le transfert de puissance de l'excitateur vers l'oscillateur est maximal.

Notons qu'en pratique des phénomènes dissipatifs dans l'oscillateur font qu'un transfert net d'énergie existe toujours entre excitateur et oscillateur. La condition d'équilibre citée ci-dessus ne peut jamais être réalisée. De même, en présence de dissipation, la divergence évoquée ci-dessus devient un maximum.

1.5.4 Remarques finales sur la corde de Melde

En dépit de son apparente simplicité, la physique de la corde de Melde recèle un bon nombre de pièges. Les résultats sur les oscillations libres et ceux sur les oscillations forcées ne doivent pas être mélangés, la différence provenant des conditions de bord (au sens mathématique du terme) imposées à la corde. En effet,

- ▷ dans le cas des oscillations libres, l'onde dépend de la donnée d'une condition *initiale*, c'est-à-dire $\xi(x, t = 0)$ à un instant t unique et en tout point x ;
- ▷ dans le cas des oscillations forcées, l'onde dépend de la donnée d'une condition *aux limites*, c'est-à-dire $\xi(x = 0, t)$ en un point x unique et à tout instant t .

Il est donc logique que les résultats ne soient pas directement transposables d'un cas à l'autre, mais qu'il y ait une symétrie dans le rôle joué respectivement par l'espace et le temps.

En particulier, lorsque les oscillations sont forcées sinusoïdalement, l'onde est stationnaire puisqu'elle découple espace et temps. Au contraire, lorsque les oscillations sont libres, elle ne l'est pas, mais est une combinaison linéaire d'ondes stationnaires.

Remarque : Attention toutefois, si jamais le forçage n'est pas harmonique, alors l'onde n'est pas stationnaire mais combinaison linéaire d'ondes stationnaires aux différentes fréquences du forçage ; et si jamais la condition initiale a la forme d'un mode propre (c'est-à-dire un sinus), alors l'onde est stationnaire. On voit ici apparaître la symétrie mentionnée précédemment, mais ce ne sont pas les cas auxquels on s'intéresse le plus souvent.

Par ailleurs, il n'y a pas de « décomposition sur la base des modes propres » ou « d'excitation de plusieurs modes » dans le cas des oscillations forcées, cela ne vaut que pour les oscillations libres. Ce résultat devient « évident » en remarquant qu'un mode propre est caractérisé par la donnée de sa pulsation, alors que dans le cas des oscillations forcées la pulsation est donnée par le forçage : la pulsation des oscillations de la corde ne peut donc pas correspondre à celle de plusieurs modes propres à la fois.

Néanmoins, il ne faut pas croire pour autant que les deux cas n'ont « rien à voir ». En particulier, l'autre condition aux limites qui impose une extrémité fixe à la corde et qui permet l'existence d'ondes stationnaires est la même dans les deux situations.