

# Leçon de physique n° 6

## Cinématique relativiste



### Bibliographie

- *Relativité restreinte*, Pérez, Masson
- *Relativité restreinte*, Hulin, Dunod
- *Mécanique 1 et 2*, Bertin, Faroux, Renault, Dunod

### Introduction :

Lorsque l'on parle de relativité, il faut bien distinguer le "principe de relativité", commun à Galilée et à Einstein, des théories de la relativité, en particulier la "théorie de la relativité restreinte" qui s'appuie entre autre sur le principe de relativité. Nous commencerons par rappeler ce qu'est la relativité galiléenne et la transformation de Galilée. Puis, en tenant compte des expériences historiques sur la vitesse de la lumière et les lois de Maxwell, nous verrons apparaître la relativité restreinte associée à une nouvelle transformation, celle de Lorentz.

## 6.1 Rappels historiques

### 6.1.1 Mécanique classique et transformation de Galilée

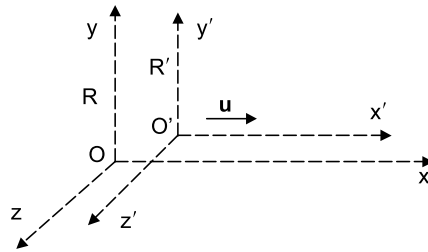
En cinématique classique, le mouvement d'un point  $M$  par rapport à un référentiel galiléen  $R$  est défini par trois fonctions  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  représentant sa position à l'instant  $t$ . Un événement est donc défini par la donnée de trois coordonnées d'espace plus le temps.

Le carré de l'intervalle entre deux points  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  et  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , dans un repère orthogonal est :

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

De même entre deux points infiniment proches  $M(x, y, z)$  et  $M + dM(x + dx, y + dy, z + dz)$  :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$



Cette quantité est indépendante du système de repérage des points et est invariante vis à vis d'un changement de référentiel galiléen. Cela signifie que dans un autre référentiel galiléen  $R'$  en translation rectiligne uniforme à la vitesse  $u$  par rapport à  $R$ , le carré de l'intervalle entre  $M(x', y', z')$  et

$M + dM(x' + dx', y' + dy', z' + dz')$  est le même que dans  $R$ , et donc :

$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

Notons que l'on peut toujours positionner les axes  $Ox$  et  $Ox'$  de  $R$  et  $R'$  parallèlement à  $u$  sans restreindre la généralité du problème.

La forme quadratique qui à tout vecteur  $dM$  associe le scalaire  $ds^2$  a pour signature  $(+, +, +)$ . Elle est définie positive et permet de définir une norme euclidienne. L'espace à trois dimensions est donc euclidien.

Le temps s'écoule de façon identique dans  $R$  et  $R'$ . Deux événements simultanés dans  $R$  le sont également dans  $R'$ . Ainsi il existe aussi un invariant temporel vis à vis d'un changement de référentiel galiléen :

$$dt = dt'$$

La transformation permettant de passer des coordonnées  $(x, y, z)$  d'un point  $M$  dans  $R$ , à ses coordonnées  $(x', y', z')$  dans  $R'$  au même instant, est la transformation de Galilée :

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Les lois de composition des vitesses s'obtiennent en dérivant les relations précédentes par rapport au temps. Elles s'écrivent :

$$\begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

En dérivant une nouvelle fois on obtient les lois de composition de l'accélération :

$$\begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases}$$

Il y a invariance de l'accélération par changement de référentiel galiléen. En mécanique classique la masse est un invariant. Pour un point matériel  $M$  de masse  $m$ , soumis à une force  $\vec{F}$ , le principe fondamental de la mécanique classique s'écrit  $\vec{F} = m\vec{a}$ . La force doit donc être invariante pour que le principe de relativité soit vérifié. Ce principe qui stipule que toutes les lois physiques de la nature sont les mêmes dans tous les référentiels galiléen est satisfait lorsque l'on associe à la mécanique classique la transformation de Galilée. Si l'on essayait d'associer d'autres lois physiques, de l'électromagnétisme par exemple, à la transformation de Galilée, ce principe ne serait plus vérifié comme nous allons le voir.

### 6.1.2 Mise en défaut de la transformation de Galilée

#### Incompatibilité avec l'électromagnétisme

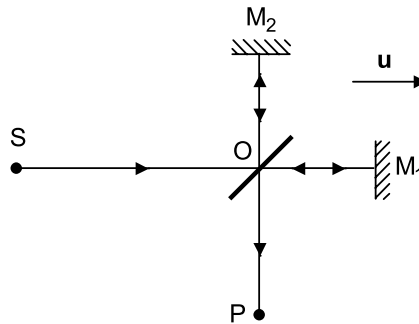
Les équations de Maxwell, à la base de l'électromagnétisme, prévoient la propagation d'ondes dans le vide à la vitesse  $c = 300000 \text{ km/s}$ . Cette vitesse est indépendante de

la source de l'onde et donc du référentiel d'étude. La question est alors de savoir dans quel référentiel on mesure cette vitesse. A la fin du XIX siècle, la plupart des scientifiques supposaient l'existence d'un milieu baignant tout l'univers : L'éther. Par analogie avec les ondes sonores se propageant dans l'air, l'éther devait avoir une structure rigide permettant la propagation des ondes électromagnétiques. Il devenait alors naturel de définir la vitesse des ondes électromagnétiques par rapport à l'éther. Mais de ce fait on mettait en évidence l'existence d'un référentiel absolu, contrairement au principe de relativité.

### Expérience de Michelson et Morley

De nombreuses expériences ont essayé de mettre en évidence la variation de la vitesse de la lumière dans le vide suivant le référentiel d'observation, conformément à la transformation de Galilée. L'une d'elle, la plus connue, commença en 1881 et acquit une précision adéquate en 1887. C'est l'expérience de Michelson et Morley que nous allons décrire.

Nous appellerons  $c$  la vitesse de la lumière mesurée dans le référentiel absolu de l'éther  $R$ , et  $c'$  cette vitesse mesurée dans un référentiel  $R'$  en translation rectiligne uniforme par rapport à  $R$ . La difficulté de l'expérience était de trouver un référentiel mobile  $R'$  se déplaçant suffisamment vite par rapport à l'éther pour obtenir un écart net entre  $c$  et  $c'$ . L'ingéniosité de Michelson et Morley a été d'utiliser la terre elle-même, supposée se déplacer dans l'éther, et dont la vitesse orbitale autour du soleil est  $u \approx 30$  km/s. Si la transformation de Galilée est valable, un faisceau qui se propage parallèlement au déplacement de la terre à une vitesse  $c' = c \pm u$  et si sa direction est perpendiculaire au déplacement  $c' = c$ .



Pour vérifier cela, Michelson et Morley ont utilisé un interféromètre constitué de deux bras  $OM_1$  et  $OM_2$  de longueurs  $l = 10$  m perpendiculaires entre eux. Le bras  $OM_1$  est parallèle au déplacement de la terre et par une rotation de  $90^\circ$  il peut prendre une direction perpendiculaire à  $u$ . Un faisceau lumineux émis par une source monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 5 \mu\text{m}$  en S, est divisé en deux par le miroir semi-réfléchissant placé en O. Après réflexion sur les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  les faisceaux viennent interférer en P. En

pratique, on réalise un coin d'air. La différence de marche étant très faible, les interférences correspondantes s'observent en lumière non parallèle.

Le calcul de la variation de l'ordre d'interférence lorsque les miroirs tournent de  $90^\circ$  donne  $\Delta p = 2lu^2/\lambda c^2 = 0,4$ . Or le déplacement observé était de 0,02 frange. Le résultat de l'expérience était donc négatif et aucune expérience similaire n'a jamais permis de détecter un net décalage des franges.

Cette expérience vient confirmer les lois de Maxwell prédisant une vitesse de la lumière constante. Beaucoup de scientifiques de l'époque, dont Lorentz, essayèrent de restaurer la théorie de l'éther en imaginant qu'au voisinage de la terre par exemple, l'éther était entraîné par celle-ci. Mais aucun cadre théorique cohérent ne permettait sérieusement de prendre en compte ces hypothèses. Il s'agissait alors de faire un choix parmi les trois assertions suivantes, incompatibles entre elles.

- La vitesse de la lumière dans le vide est constante et ne dépend pas du référentiel d'étude.
- Toutes les lois physiques sont identiques dans tous les référentiels galiléens.
- La transformation de Galilée permet de passer d'un référentiel galiléen à un autre.

C'est Einstein, n'ayant jamais vraiment cru à l'existence de l'éther, qui proposa d'abandonner la transformation de Galilée et de ne conserver que le principe de relativité et l'invariance de  $c$ . Ce seront les deux postulats de la relativité restreinte.

## 6.2 Postulats de la relativité restreinte et transformation de Lorentz

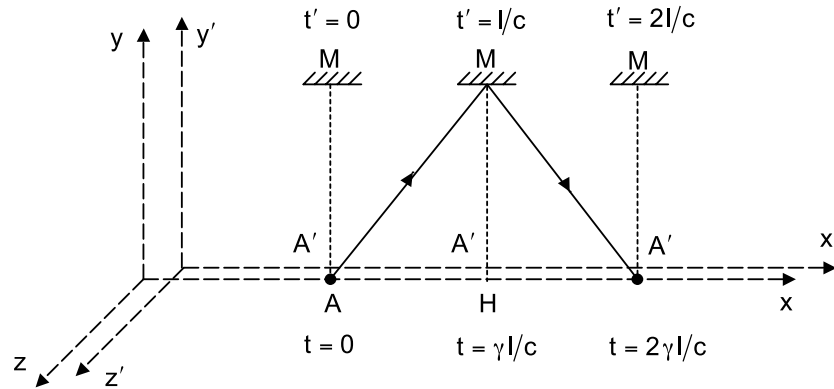
### 6.2.1 Postulats de la relativité restreinte

**1er postulat :** Toutes les lois physiques de la nature prennent la même forme dans tous les référentiels galiléens (ou inertiels) en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres et dans lesquels l'espace est homogène, isotrope et le temps uniforme. Ce premier postulat correspond au principe de relativité, évoqué en mécanique classique.

**2ème postulat :** La vitesse de la lumière dans le vide est constante ( $c = 299\,792\,458$  m/s) dans tous les référentiels galiléens. C'est la vitesse limite de propagation des interactions.

### 6.2.2 Expériences de pensée, conséquences immédiates

A première vue, le deuxième postulat est en contradiction totale avec la transformation de Galilée. Mais la mécanique classique newtonienne associée à cette transformation avait donné de très bons résultats notamment dans l'étude du mouvement des planètes, avec les lois de Kepler. On remarque que même si la vitesse orbitale des planètes est importante (comme on l'a vu pour la terre), elle reste très faible devant la vitesse de la lumière comme dans la plupart des systèmes mécaniques étudiés. Le champ d'application de la transformation de Galilée se situe donc dans le domaine des faibles vitesses devant  $c$ , alors que le deuxième postulat concerne uniquement  $c$ . Ainsi il n'y a plus de contradiction. La relativité galiléenne est un cas limite de la relativité restreinte pour des vitesses  $v \ll c$ . Voyons maintenant sur deux expériences de pensée, les conséquences du second postulat. Considérons deux référentiels galiléens  $R$  et  $R'$ . Le référentiel  $R'$  se déplace à la vitesse  $u$  par rapport à  $R$ , les axes  $Ox$  et  $Ox'$  étant parallèles à  $\vec{u}$ . Dans la première expérience, un observateur  $A'$  lié à  $R'$  envoie un signal lumineux suivant l'axe  $Oy'$ . Ce signal est réfléchi par un miroir  $M$  fixe dans  $R'$  à une distance  $l$  de  $A'$ , et revient en  $A'$  au bout d'un temps  $t' = 2l/c$  puisque la vitesse de la lumière est  $c$  dans  $R'$ .



La figure représente les différentes positions du miroir, vu par un observateur  $A$  immobile dans  $R$ . Supposons que  $A$  coïncide avec  $A'$  lorsque le signal est émis. Ce signal revient en  $A$  au bout d'un temps  $t = 2AM/c$ . Or :

$$AM = \sqrt{AH^2 + l^2} \quad \text{avec} \quad AH = u \frac{AM}{c}$$

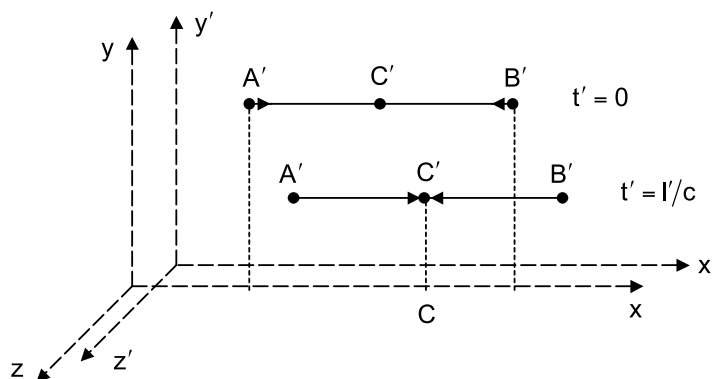
On obtient :

$$AM = \gamma l \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

D'où

$$t = \gamma t'$$

La durée de l'expérience est plus courte pour un observateur de  $R'$  que pour un observateur de  $R$  car  $\gamma > 1$ . Le temps ne s'écoule pas de la même façon dans  $R$  et  $R'$ , contrairement à l'hypothèse du temps absolu de la cinématique classique. Bien sûr, si  $u \ll c$ ,  $\gamma \approx 1$  et le temps peut être à nouveau considéré comme universel. Dans la deuxième expérience, deux observateurs  $A'$  et  $B'$  immobiles dans  $R'$ , situés à la même distance  $l'$  (et non  $l$ , car nous verrons que la distance mesurée dans  $R$  et dans  $R'$  n'est pas la même, sur cet exemple) d'un troisième observateur  $C'$  également fixe dans  $R'$ , émettent chacun un signal lumineux suivant la direction  $Ox$  à l'instant  $t' = 0$ , qui arrive en  $C'$  au même instant  $t' = l'/c$ . Préalablement, pour synchroniser les horloges de  $A'$  et  $B'$ ,  $C'$  peut leur envoyer un signal.

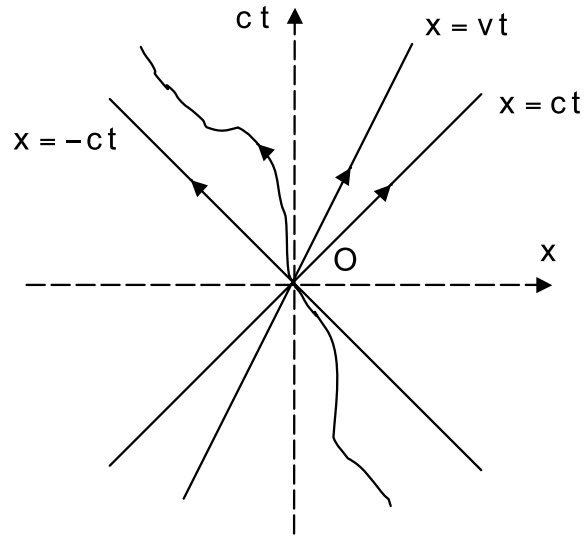


La figure représente les trois observateurs liés à  $R'$ , vus de  $R$ , à l'émission et à la réception des signaux. A la réception des signaux, un observateur  $C$  lié à  $R$  se trouve en face de  $C'$ . Lorsque  $A'$  et  $B'$  ont émis leur signaux,  $B'$  était plus proche de  $C$  que  $A'$ . Pour  $C$ ,  $B'$  a donc envoyé son signal après  $A'$  car la vitesse de la lumière est la même dans  $R$  et  $R'$ . L'émission des signaux est simultanée dans  $R'$  mais ne l'est pas dans  $R$ . Nous verrons plus tard comment calculer cet écart en temps dans le référentiel  $R$ . Ainsi, le temps doit être défini dans chaque référentiel galiléen.

### 6.2.3 Evénements et intervalles

Désormais, une expérience (par exemple l'émission d'un signal) sera décrite dans l'espace-temps quadridimensionnel par un événement appelé aussi point d'univers. Il se caractérise

par la donnée de trois coordonnées spatiales et une coordonnée temporelle dans un référentiel galiléen. Au cours du temps un point d'univers se déplace dans l'espace-temps et décrit une ligne d'univers. Une particule animée d'un mouvement rectiligne uniforme a une ligne d'univers rectiligne. En particulier, si sa vitesse est  $c$ , les lignes d'univers partant d'un événement  $O$  forment le cône de lumière de cet événement.



Pour visualiser graphiquement ces notions, il est commode d'utiliser l'espace-temps à une dimension spatiale. Sur la figure, nous avons représenté un événement  $O$  (un point en  $x = 0$  et  $t = 0$ ), le cône de lumière de cet événement formé par les droites  $x = \pm ct$ , et deux lignes d'univers; la première, quelconque issue de  $O$  et la deuxième, rectiligne, correspondant à une particule de vitesse  $v = ct_e < c$ . Les lignes sont orientées du passé vers le futur car le temps s'écoule toujours dans le même sens. D'autre part, les lignes d'univers issues de  $O$  se situent à l'intérieur de son cône de lumière. Ceci va permettre de préciser ce qu'est la causalité en relativité restreinte, en définissant l'intervalle entre deux événements. Nous voyons déjà qu'en plus du principe de causalité en relativité galiléenne (tout effet précède la cause), deux événements ne peuvent avoir de relation causale que si l'un est dans le cône de lumière de l'autre et inversement. Considérons un événement  $M_1$  de coordonnées  $(ct_1, x_1, y_1, z_1)$  dans un référentiel galiléen  $R$ , correspondant à l'émission d'un signal lumineux, et un événement  $M_2$  de coordonnées  $(ct_2, x_2, y_2, z_2)$  dans  $R$ , correspondant à la réception de ce signal. On a alors la relation :

$$c^2(t_2 - t_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

Les événements  $M_1$  et  $M_2$  sont respectivement sur le cône de lumière de  $M_2$  et  $M_1$ . Dé-

finissons maintenant l'intervalle  $s_{1,2}$  entre deux évènements quelconques  $M_1(ct_1, x_1, y_1, z_1)$  et  $M_2(ct_2, x_2, y_2, z_2)$  par :

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

Si  $M_1$  et  $M_2$  sont sur leur cône de lumière réciproque l'intervalle est nul. Mais dans le cas général  $s'_{1,2} = s_{1,2}$  peut être positif ou négatif. Plaçons-nous dans un autre référentiel  $R'$  où les coordonnées de  $M_1$  et  $M_2$  sont  $(ct', x', y', z')$  et  $(ct'_2, x'_2, y'_2, z'_2)$ . Dans  $R'$ , l'intervalle  $s'$  entre  $M_1$  et  $M_2$  est tel que :

$$s'^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2$$

Si  $M_1$  et  $M_2$  peuvent être reliés par un signal lumineux, alors  $s'^2 = s^2 = 0$ . Dans le cas contraire, nous ne savons rien à priori sur l'éventuelle relation liant  $s'$  et  $s$  tant que nous n'avons pas la transformation qui permet de passer des coordonnées de  $R$  à celles de  $R'$ . Essayons malgré tout de voir, sans démonstration rigoureuse, comment sont reliés les intervalles entre deux évènements infiniment voisins  $M(ct, x, y, z)$  et  $M + dM(c(t + dt), x + dx, y + dy, z + dz)$  dans  $R$  et dans  $R'$ . Dans  $R$ , l'intervalle  $ds$  est tel que :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

et dans  $R'$  :

$$ds'^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

Supposons que  $ds^2$  et  $ds'^2$  soient des infiniment petits du même ordre. Cette hypothèse se traduit par la relation :

$$ds^2 = \alpha(u) ds'^2$$

où  $\alpha$  est une fonction ne pouvant dépendre que du module de la vitesse de  $R'$  par rapport à  $R$ ,  $u$ , puisque l'espace est isotrope. Elle ne peut pas dépendre des coordonnées spatiales car l'espace est supposé homogène, pas plus que des coordonnées temporelles car le temps est uniforme. De plus, en considérant un troisième référentiel galiléen  $R''$  à la vitesse  $v$  par rapport à  $R'$  et  $w$  par rapport à  $R$ , il vient :

$$ds''^2 = \alpha(v) ds'^2 = \alpha(w) ds^2 = \alpha(w) \alpha(u) ds'^2$$

d'où :

$$\alpha(u) = \alpha(v)/\alpha(w)$$

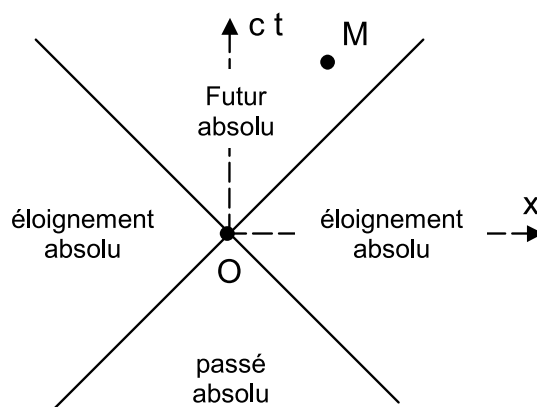
Mais  $u$  doit aussi dépendre de l'angle que font les vecteurs  $v$  et  $w$  entre eux. Cet angle n'apparaît pas dans le rapport  $\alpha(v)/\alpha(w)$ . On en déduit que  $\alpha$  ne dépend pas de  $u$ , donc  $\alpha = \alpha/\alpha$  et  $\alpha = 1$ . Finalement :

$$ds^2 = ds'^2$$

Cette relation exprime l'invariance de l'intervalle par changement de référentiel galiléen. On dit que l'intervalle est un invariant relativiste. Pour un intervalle fini entre deux événements  $M_1$  et  $M_2$  :

Nous sommes donc en mesure de définir le passé et le futur d'un événement indépendamment du référentiel d'étude. Trois cas se présentent.

- $s^2 > 0$  : L'intervalle est du genre temps. Les événements  $M_1$  et  $M_2$  peuvent être reliés par un signal se propageant moins vite que la lumière. Ils sont dans leur cône de lumière réciproque.
- $s^2 < 0$  : L'intervalle est du genre espace. La distance spatiale entre  $M_1$  et  $M_2$  est trop grande pour que les événements puissent être reliés par un signal à la vitesse  $c$  pendant le temps  $t_2 - t_1$ . Il n'existe pas de relation causale entre  $M_1$  et  $M_2$ .
- $s^2 = 0$  : L'intervalle est du genre lumière. Les événements  $M$  et  $M$  ne peuvent être reliés que  $s'^2 = s^2$  par un signal lumineux de vitesse  $c$ .



La figure représente deux évènements  $O(0,0)$  et  $M(ct,x)$  dans un espace-temps à deux dimensions. Le point  $M$  se situe dans le cône de lumière de  $O$  pour  $t > 0$ . Nous allons montrer que l'évènement  $M$  a lieu après l'évènement  $O$ . Il n'existe pas de référentiel dans lequel  $M$  et  $O$  aurait lieu simultanément. En effet, en considérant un référentiel  $R'$ , où  $M$  a pour coordonnées  $(ct', x')$ , l'invariance relativiste de l'intervalle du genre temps entre  $O$  et  $M$  permet d'écrire  $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 > 0$ . Si  $t' = 0$  alors  $-x'^2 > 0$ , ce qui est impossible. Donc  $M$  ne peut pas être antérieur à  $O$ , car dans ce cas il devrait obligatoirement "passer" par  $O$ , du fait qu'il doit rester dans le cône de lumière. Un raisonnement identique peut être mené pour  $t < 0$ . Ainsi la notion de causalité est invariante relativiste.

En revanche, si  $M$  se situe à l'extérieur du cône de lumière de  $O$ , il existe des référentiels où  $M$  a lieu avant, pendant ou après l'évènement  $O$ .

#### 6.2.4 Transformation de spéciale de Lorentz

Nous cherchons maintenant à établir de façon explicite la loi de transformation permettant de passer des coordonnées d'un évènement  $M$ ,  $(ct, x, y, z)$  dans un référentiel galiléen  $R$ , à ses coordonnées  $(ct', x', y', z')$  dans un autre référentiel galiléen  $R'$ . Supposons, comme nous l'avons fait jusqu'à maintenant, que  $R'$  se déplace à la vitesse  $u$  par rapport à  $R$ , les axes  $Ox$  et  $Ox'$  restant parallèles. A l'instant initial  $t = 0$ , les évènements origine  $O$  et  $O'$  coïncident. Dans ces conditions, la transformation cherchée s'appelle la transformation spéciale de Lorentz. Remarquons tout d'abord que les coordonnées  $y$  et  $z$  ne sont pas affectées. Nous y reviendrons lorsque nous aurons compris comment interpréter la transformation en terme de rotation. Il en résulte :

$$y' = y \text{ et } z' = z$$

Supposons la transformation linéaire. Le temps étant uniforme, l'espace homogène et isotrope, il nous reste à déterminer quatre coefficients,  $a, b, d$  et  $e$  en fonction de  $u$  tels que :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(u) & b(u) \\ d(u) & e(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Pour cela, utilisons l'invariance relativiste de l'intervalle entre  $O$  et  $M$  :

$$c^2t^2 - x^2 = (a^2 - d^2)c^2t^2 + (b^2 - e^2)x^2 + 2(ab - ed)ctx = c^2t'^2 - x'^2$$

On déduit trois relations par identification :

$$\begin{cases} a^2 - d^2 = 1 \\ b^2 - e^2 = -1 \\ ab - ed = 0 \end{cases}$$

Une quatrième relation s'obtient avec l'origine  $O'$  dans  $R'$  en  $x' = 0$ , qui se transforme en  $O$  dans  $R$  en  $x = ut$ , d'où  $0 = dct + eut$ . En posant  $\beta = u/c$ , il vient :

$$d = -\beta e$$

On reporte  $d$  et on obtient :  $b = -\beta e^2/a$ . Puis  $d$  et  $b$  dans (1) et (2) donne :

$$a^2 - \beta^2 e^2 = 1$$

$$\beta^2 e^4 - e^2 a^2 = -a^2$$

Finalement, en posant  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  on obtient :

$$e = \pm \gamma$$

D'où

$$d = \pm \beta \gamma$$

De (1) et (2) on déduit :

$$a = \pm \gamma \text{ et } b = \pm \beta \gamma$$

de signes opposés. Lorsque  $u$  tend vers 0, la transformation correspond à la matrice identité. On lève ainsi l'indétermination des signes et il vient :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

La transformation spéciale de Lorentz s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Pour  $\beta \ll 1$ , nous retrouvons immédiatement, au premier ordre en  $\beta$ , la transformation de Galilée.

La transformation spéciale de Lorentz s'interprète comme une rotation hyperbolique dans le plan  $xOct$ . En effet si nous définissons la rapidité  $\varphi$ , prenant des valeurs de  $-\infty$  à  $+\infty$  par  $\tanh \varphi = \beta$ , la transformation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

D'une façon générale, les transformations préservant l'invariance relativiste de l'intervalle ne peuvent être que des rotations (ou des translations qui ne présentent pas d'intérêt). Elles se décomposent en trois rotations ordinaires dans les plans  $xOy$ ,  $xOz$  et  $yOz$  et trois rotations hyperboliques dans les plans  $xOct$ ,  $yOct$  et  $zOct$ . Dans chacune de ces rotations, les coordonnées orthogonales au plan de rotation restent inchangées.

### 6.2.5 Composition des vitesses

A partir de la transformation spéciale de Lorentz, on obtient par différentiation :

$$\begin{cases} dt' &= \gamma(dt - udx/c^2) \\ dx' &= \gamma(dx - udt) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \end{cases}$$

Et puisque dans  $R'$  les composantes de la vitesse d'un point  $M$  sont  $v'_x = dx'/dt'$ ,  $v'_y = dy'/dt'$  et  $v'_z = dz'/dt'$ , la loi de composition des vitesses s'écrit :

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

$$v'_y = v_y \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

$$v'_z = v_z \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

Conformément au deuxième postulat de la relativité restreinte, si  $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2$  alors  $v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 = c^2$  et réciproquement. On retrouve également la loi de composition classique pour  $\beta \ll 1$

## 6.3 Temps propre, longueur propre

### 6.3.1 Temps propre

Considérons une particule  $M$  en mouvement par rapport à un référentiel galiléen  $R$ . Son mouvement n'étant pas forcément rectiligne uniforme, il n'existe pas un seul référentiel galiléen lié à la particule dans lequel elle serait au repos au cours du temps. Par contre, à chaque instant, on peut introduire un référentiel galiléen  $R'$  où la particule est immobile, appelé référentiel propre ou référentiel tangent de la particule. Il a la vitesse  $v$  de celle-ci à l'instant considéré et nous supposons que l'origine  $O'$  de son repère, coïncide avec  $M$ . Dans  $R$ , l'intervalle entre deux événements infiniment proches,  $M(ct, x, y, z)$  et  $M + dM(c(t + dt), x + dx, y + dy, z + dz)$  est :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Pendant le temps  $dt$ , la particule s'est déplacée de  $dl$  tel que :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = v^2 dt^2$$

D'où :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - v^2 dt^2 = c^2 dt^2 (1 - v^2/c^2)$$

Dans le référentiel propre  $R'$ , la vitesse de la particule est nulle et l'intervalle de temps propre  $dt'$  est défini par la relation :

$$ds'^2 = c^2 dt'^2$$

L'intervalle  $dt'$  est un invariant relativiste au même titre que  $ds' = ds$ . Le temps propre de la particule  $t'$ , s'obtient par intégration de  $dt'$  dans les différents référentiels propres introduit au cours du temps. D'après les deux relations précédentes :

$$dt = \gamma dt' \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

L'intervalle de temps propre  $dt'$ , mesuré dans  $R'$  est plus court que l'intervalle  $dt$  mesuré dans  $R$  car  $\gamma > 1$ . Autrement dit, le temps s'écoule moins vite dans le référentiel propre que dans  $R$ . On dit qu'il y a dilatation du temps. Il est facile de retrouver ce résultat à l'aide de la transformation spéciale de Lorentz. Considérons une horloge (ou une particule) qui émet des signaux à intervalles de temps réguliers  $\Delta t'$ , mesurés dans son référentiel propre  $R'$ . Dans ce référentiel, l'horloge est immobile et donc  $\Delta x' = 0$ . Mais la transformation spéciale de Lorentz, inversée (la matrice de passage s'obtient en remplaçant  $\vec{v}$  par  $-\vec{v}$ ) donne :

$$\Delta t = \gamma \left( \Delta t' + v \frac{\Delta x'}{c^2} \right)$$

et :

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

Cette conséquence surprenante de la relativité restreinte se vérifie expérimentalement. Une particule susceptible de se désintégrer a une durée de vie moyenne déterminée dans son référentiel propre par son horloge interne. Si sa durée de vie est très courte, elle sera néanmoins observable si sa vitesse est proche de  $c$  car  $\gamma$  sera très grand devant 1 de même que le temps de son observation dans  $R$  avant sa désintégration. C'est dans les accélérateurs de particules que l'on peut vérifier ce phénomène, ou comme l'ont fait Frish et Smith en 1963, en étudiant la désintégration des muons produit dans la haute atmosphère.

### 6.3.2 Longueur propre

Considérons une barre en mouvement par rapport à un référentiel galiléen  $R$ . A chaque instant, définissons son référentiel propre  $R'$  et plaçons l'axe  $Ox'$  parallèle à la barre. A l'instant  $t$  dans  $R$ , supposons comme nous l'avons toujours fait, que les axes  $Ox$  et  $Ox'$  sont parallèles.

La longueur propre d'une barre est la longueur de cette barre dans son référentiel propre. Nous la notons  $\Delta x'$ . Pour connaître la longueur de la barre dans  $R$ , il suffit de déterminer la distance  $\Delta x$  séparant les deux évènements correspondant aux extrémités de la barre au même instant, c'est à dire pour  $\Delta t = 0$ . Or la transformation spéciale de Lorentz nous donne :

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

D'où :

$$\Delta x' = \gamma\Delta x \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Dans la direction du mouvement, la longueur mesurée dans  $R$  est plus petite que celle mesurée dans  $R'$ . On dit qu'il y a contraction des longueurs. Mais dans une direction perpendiculaire au mouvement, la longueur est la même puisque  $\Delta y' = \Delta y$  et  $\Delta z' = \Delta z$

En conséquence, tout objet volumique subit une contraction. Par exemple, en électromagnétisme, la densité volumique de charge dans le référentiel propre, s'écrit :

$$\rho' = \frac{dq}{dV'} = \frac{dq}{dx'dy'dz'}$$

Et dans le référentiel  $R$  :

$$\rho = \frac{dq}{dv} = \frac{dq}{dxdydz} = \frac{\gamma dq}{dx'dy'dz'} = \gamma\rho'$$

### 6.3.3 Exemples

#### Expérience de Michelson et Morley

Reprenons l'expérience précédente. Considérons le référentiel héliocentrique galiléen  $R$  et le référentiel propre de l'interféromètre de Michelson  $R'$ , lié à la terre. Dans  $R'$ , les faisceaux lumineux issus du miroir semi-réfléchissant en  $O$ , parcourent les distances  $OM_1O$  et  $OM_2O$  en un temps identique :

$$t' = t'_1 = t'_2 = \frac{2l'}{c}$$

où  $l'$  est la longueur propre des deux bras de l'interféromètre. Dans  $R$ , d'après la dilatation du temps, le temps mis par les faisceaux lumineux pour revenir en  $O$ , dans chacun des bras est :

$$t = t_1 = t_2 = \gamma t' = \gamma \frac{2l'}{c}$$

L'ordre d'interférence est donc nul et il n'y a pas de décalage des franges. Mais attention, la distance parcourue par les faisceaux dans chacun des bras n'est pas la même car il y a uniquement contraction de la longueur du bras parallèle à la direction du déplacement de la terre. Ainsi, la théorie de la relativité restreinte permet d'expliquer le résultat de l'expérience de Michelson et Morley.

### Expérience de pensée

La première expérience de pensée que nous avons abordée, à savoir la réflexion d'un signal lumineux sur un miroir mobile, nous avait permis de mettre en évidence le phénomène de dilatation du temps. Elle correspond à la réflexion du faisceau transverse dans l'expérience de Michelson et Morley. Nous n'y reviendrons pas. La seconde expérience nous avait fait entrevoir la non simultanéité de deux événements dans un référentiel  $R$ , alors qu'ils le sont dans un référentiel  $R'$  que nous appelons maintenant référentiel propre, sans pouvoir toutefois déterminer le décalage temporel dans  $R$ . Nous allons pouvoir calculer maintenant, ce décalage, à l'aide de la transformation spéciale de Lorentz. Considérons les deux événements  $A'$  et  $B'$  de coordonnées dans  $R'$ , ( $t'_A = 0, x'_A = -l'$ ) et ( $t'_B = 0, x'_B = l'$ ), correspondant à l'émission simultanée des signaux lumineux. La transformation spéciale de Lorentz permet d'écrire :

$$t_A = \gamma(t'_A + \frac{vx'_A}{c^2})$$

$$t_B = \gamma(t'_B + \frac{vx'_B}{c^2})$$

D'où :

$$t_A = -\frac{\beta\gamma l'}{c}$$

$$t_B = \frac{\beta\gamma l'}{c}$$

On retrouve bien le fait que  $t_A$  soit antérieur à  $t_B$ . La contraction des longueurs s'exprime par la relation  $l' = \gamma l$ . Finalement, le décalage est :

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{2\beta\gamma^2 l}{c}$$

### Autres exemples

- Expérience de Frish et Smith
- Effet Doppler longitudinal et transversal
- Paradoxe des jumeaux
- Aberration des étoiles

## 6.4 Interprétation géométrique et quadrivecteurs

### 6.4.1 Interprétation géométrique et quadrivecteur "position"

Considérons les coordonnées  $(ct, x, y, z)$  d'un événement  $M$ , dans un référentiel galiléen  $R$ , comme les composantes  $OM_i, i = 0, 1, 2, 3$ , d'un quadrivecteur  $OM$  dans un espace vectoriel à quatre dimensions. En notant  $x_i, i = 0, 1, 2, 3$ , ces composantes :

$$OM_i = (x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)$$

Puisque  $x, y, z$  sont les composantes du vecteur  $OM = r$  dans l'espace ordinaire à trois dimensions, nous écrirons également :

$$OM = (ct, \vec{r})$$

On appelle parfois  $OM$ , le quadrivecteur position, bien que quadrivecteur événement soit plus adapté.

Il est possible de munir l'espace vectoriel à quatre dimensions, d'une forme quadratique non définie positive, qui à tout quadrivecteur  $OM$  associe le scalaire :

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

C'est sa pseudo-norme. Elle est égale à :

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

et est donc invariante relativiste. La métrique est pseudo-euclidienne de signature  $(+, -, -, -)$  et l'espace correspondant s'appelle l'espace de Minkowski.

Rq : Si nous avons défini l'intervalle entre  $O$  et  $M$  par  $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ , la signature de la métrique aurait été  $(-, +, +, +)$ . Ce choix est purement conventionnel.

Signalons enfin que le produit scalaire entre deux quadrivecteurs  $OM$  et  $OP$  de composantes  $x_i$  et  $y_i$  est :

$$OM \cdot OP = x_i y_i = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$$

En toute rigueur, le terme produit scalaire n'est pas exacte puisque la forme quadratique n'est pas définie positive. Il est facile de se convaincre, en utilisant la transformation spéciale de Lorentz, que c'est un invariant relativiste.

### 6.4.2 Quadrivecteur vitesse

Définissons maintenant le quadrivecteur vitesse  $V$  d'une particule en mouvement à une vitesse arbitraire  $v$ , par rapport à un référentiel galiléen  $R$ . A un instant  $t$  dans  $R$ , il existe un référentiel propre  $R'$  où la particule est au repos. La vitesse de la particule est le déplacement élémentaire de l'événement  $M$  associé à la particule, pendant le temps propre  $dt'$ . Le quadrivecteur vitesse s'écrit alors :

$$V = \frac{dOM}{dt'}$$

Mais dans  $R$ ,  $dt = \gamma dt'$ , donc

$$V = \gamma \frac{dOM}{dt}$$

En utilisant la notation  $OM = (ct, \vec{r})$ , le quadrivecteur vitesse  $V$  s'écrit :

$$V = \gamma(c, \vec{v})$$

Et ses composantes :

$$V_i = (v_0 = \gamma c, v_1 = \gamma v_x, v_2 = \gamma v_y, v_3 = \gamma v_z)$$

La pseudo-norme de  $V$  est :

$$V^2 = V_i V_i = \gamma^2 (c^2 - v^2) = \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2$$

Elle est invariante relativiste.

Enfin, vérifions que les composantes du quadrivecteur vitesse se transforment conformément à la transformation spéciale de Lorentz, lors d'un changement de référentiel galiléen. Notons  $u$ , la vitesse d'un référentiel galiléen  $R'$ , par rapport à un autre référentiel galiléen  $R$ . La vitesse de la particule dans  $R$  est  $v$  et dans  $R'$ ,  $v'$ . Nous avons :

$$\begin{pmatrix} \gamma' c \\ \gamma v'_x \\ \gamma v'_y \\ \gamma v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_u & -\beta \gamma_u & 0 & 0 \\ -\beta \gamma_u & \gamma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma v_x \\ \gamma v_y \\ \gamma v_z \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \beta = u/c, \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ et } \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}.$$

On déduit :

$$\gamma' = \gamma \gamma_u \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)$$

$$v'_x = \frac{\gamma \gamma_u}{\gamma'} (v_x - u)$$

$$v'_y = \gamma \frac{v_y}{\gamma'}$$

$$v'_z = \gamma \frac{v_z}{\gamma'}$$

D'où

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

$$v'_y = v_y \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

$$v'_z = v_z \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

en accord avec ce que nous avons obtenu précédemment.

*Conclusion :*

La relativité restreinte a émergé suite à l'étude de l'électromagnétisme par Maxwell et de l'incompatibilité de l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide avec la transformation de Galilée. Cette théorie s'est révélée parfaitement adaptée à l'étude de l'électro-

magnétisme, puis de toutes les autres lois fondamentales de la nature, à l'exception de la gravitation. En effet, il n'est pas possible d'appliquer la relativité restreinte à la gravitation de Newton. Pour remédier à cela, Einstein proposa en 1915, la théorie de la relativité générale, dans laquelle la géométrie de l'espace-temps n'est plus pseudo-euclidienne mais variable suivant le champ de gravitation existant dans cet espace.



# Dynamique relativiste



## Bibliographie

- *Mécanique 1 et 2*, Faroult, Renault, Dunod
- *Physique théorique : Théorie des champs*, Landau, Mir
- *Relativité restreinte et structure atomique de la matière*, Grossetête, Ellipses

### Introduction :

Nous commencerons par poser les bases de la dynamique relativiste en nous appuyant sur les résultats obtenus en cinématique relativiste, préalable indispensable à l'étude des collisions.

Nous appliquerons les lois de conservation à l'étude des chocs élastiques et inélastiques des particules élémentaires et noyaux atomiques. Nous verrons enfin quelles sont les modifications apportées par la relativité restreinte par rapport au traitement classique.

## 7.1 Dynamique relativiste

### 7.1.1 Quadrivecteur énergie impulsion

En cinématique relativiste, nous savons que le quadrivecteur vitesse d'une particule en mouvement à la vitesse  $v$  par rapport à un référentiel galiléen  $R$  est :

$$V = \gamma(c, \vec{v}) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Si  $m$  est la masse de la particule (dans  $R$  pour le moment), le quadrivecteur énergie impulsion  $P$  est défini par :

$$P = mV = m\gamma(c, \vec{v})$$

Lorsque la vitesse de la particule est faible devant  $c$ , nous pouvons développer  $\gamma$  à l'ordre le plus bas en  $v/c$  et il vient :

$$\gamma = 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

Le quadrivecteur énergie impulsion s'écrit alors :

$$P = \left( \frac{1}{c}(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2), m\vec{v} \right)$$

La première composante de  $P$  est un terme d'énergie divisé par  $c$ . En plus de l'énergie cinétique de la particule,  $\frac{1}{2}mv^2$ , il apparaît une énergie au repos,  $mc^2$ . Les trois autres composantes de  $P$  sont celles de l'impulsion de la particule, dans l'espace ordinaire à trois dimensions.

C'est pourquoi nous postulons dans le cas général ( $v$  pouvant être proche de  $c$ ) :

$$P = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

où  $E$  est l'énergie relativiste de la particule dans  $R$  et  $p$  sa quantité de mouvement relativiste. Ceci est simplement une interprétation de l'expression du quadrivecteur énergie impulsion, dont nous comprenons au passage la dénomination. Les expressions de  $E$  et  $p$  sont :

$$\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 \\ \vec{p} &= \gamma m\vec{v} \end{aligned}$$

L'expression de l'énergie relativiste  $E$  peut se mettre sous la forme :

$$E = mc^2 + (\gamma - 1)mc^2$$

L'énergie cinétique relativiste de la particule est alors définie de façon naturelle par :

$$E_c = (\gamma - 1)mc^2$$

Voyons maintenant quelles sont les expressions de l'énergie  $E'$  et de l'impulsion  $\vec{p}'$  de la particule dans son référentiel propre  $R'$  défini à l'instant  $t$  dans  $R$ . Nous supposons que les axes  $Ox$  et  $Ox'$  de  $R$  et  $R'$  sont parallèles. Par définition d'un quadrivecteur les composantes de  $P$  se transforment suivant la transformation spéciale de Lorentz :

$$\begin{pmatrix} E'/c \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases} E'_x &= \gamma(E - vp_x) \\ p'_x &= \gamma(p_x - v\frac{E}{c^2}) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \end{cases}$$

Mais dans  $R'$ ,  $p'_x = p'_y = p'_z = 0$  puisque la particule est au repos. Donc :

$$p_x = v\frac{E}{c^2}$$

$$E' = \gamma\left(E - \frac{v^2}{c^2}E\right) = \frac{\gamma m^2 c^4}{c^2} - \gamma m^2 v^2 = m^2 c^2$$

Finalement :

$$E' = mc^2 \quad \text{et} \quad \vec{p}' = \vec{0}$$

Ce résultat était évident à partir des expressions générales de  $E'$  et  $\vec{p}'$  lorsque  $R$  est le référentiel propre et  $v = 0$ .

La pseudo-norme du quadrivecteur énergie impulsion est :

$$P^2 = P_i P_j = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{\gamma m^2 c^4}{c^2} - \gamma m^2 v^2$$

La masse  $m$  de la particule ainsi que son énergie propre  $E'$  ou énergie de masse ne dépendent pas du référentiel d'étude. Ce sont des invariants relativistes.

On donne la masse d'une particule en unité d'énergie divisée par  $c^2$  ou en unité de masse atomique. Pour le proton, le neutron et l'électron.

	$m_p$	$m_n$	$m_e$
En MeV/ $c^2$	938,28	939,57	0,5110
En $u$	1,007276 $u$	1,008665 $u$	$0,54858 \cdot 10^{-3} u$

L'expression de la pseudo-norme du quadrivecteur énergie impulsion permet d'écrire la relation fondamentale de la dynamique :

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

que l'on représente graphiquement par un triangle rectangle.

Pour un système isolé de  $N$  particules il est possible de définir le quadrivecteur énergie impulsion de l'ensemble des particules par :

$$P = \left( \frac{1}{c} \sum E_i, \sum \vec{p}_i \right)$$

à condition qu'il n'existe aucune interaction entre ces particules. Dans le cas contraire, l'énergie  $E_i$  et l'impulsion  $p_i$  de la particule  $i$  ne seraient pas des constantes. Il faudrait alors sommer les énergies et les impulsions à un instant donné dans un référentiel galiléen  $R$ . Mais dans un autre référentiel galiléen  $R'$ , du fait de la non simultanée des événements, les sommes ne seraient pas identiques.

### 7.1.2 Quadrivecteur force

Définissons le quadrivecteur force de la particule de masse  $m$ , dans un référentiel galiléen  $R$  par :

$$F = m \frac{dP}{dt'}$$

où  $dP$  est la variation élémentaire du quadrivecteur énergie impulsion pendant le temps propre  $dt'$  mesuré dans le référentiel propre de la particule. Le phénomène de dilatation du temps permet d'écrire :

$$F = \gamma \frac{dP}{dt}$$

avec

où  $t$  est le temps mesuré dans  $R$ . On en déduit :

$$F = \gamma \left( \frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right)$$

Supposons que la vitesse  $v$  de la particule, dans  $R$ , soit faible devant  $c$ . A l'ordre le plus bas en  $v/c$  :

$$F = 1 + \frac{v^2}{2c^2} \quad \text{et} \quad E = \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) mc^2$$

puis :

$$\frac{dE}{dt} = m \frac{dv}{dt} v$$

On voit que la dérivée de l'énergie par rapport au temps correspond à un terme de puissance. Les trois autres composantes de  $F$  sont celles de la force  $\vec{f}$  multipliée par dans l'espace ordinaire à trois dimensions.

Dans le cadre général de la mécanique relativiste ( $v$  pouvant être proche de  $c$ ), nous postulons que dans un référentiel galiléen  $R$  :

$$F = \gamma \left( \frac{\vec{f} \cdot \vec{v}}{c}, \vec{f} \right)$$

avec :

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{f} \cdot \vec{v} = \frac{dE}{dt}$$

Si la particule est isolée,  $\vec{f} = 0$  entraîne la conservation du quadrivecteur énergie impulsion  $P$ . Pour un système de  $N$  particules isolées :

$$\sum_{i=1}^N E_i = \text{cte} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \vec{cte}$$

### 7.1.3 Le photon, particule de masse nulle

L'expérience d'Einstein sur l'effet photoélectrique a permis de montrer que le rayonnement monochromatique de fréquence  $\nu$  est quantifié. Les particules élémentaires associées à cette quantification du champ électromagnétique sont les photons. Par ailleurs, d'après les lois de Maxwell, les ondes électromagnétiques se déplacent dans le vide à la vitesse de la lumière  $c$ . Ainsi, les photons ont une vitesse  $v = c$  dans le vide. Dans ces conditions  $\gamma$  est infiniment grand et les composantes du quadrivecteur énergie impulsion du photon ne restent finies que si sa masse est nulle. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors :

$$E = pc$$

Mais l'énergie  $E$  et l'impulsion  $p$  restent indéterminés par cette approche. Ce sont les travaux de Planck puis d'Einstein qui ont permis de définir l'énergie d'un photon par :

$$E = h\nu$$

où  $\nu$  est la fréquence du rayonnement électromagnétique et  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  J.s la constante de Planck.

De ces deux dernières expressions de l'énergie on déduit la relation de De Broglie traduisant la dualité onde-corpuscule :

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

où  $\lambda = c/\nu$  est la longueur d'onde du rayonnement. Cette relation établie pour le photon se généralise à toutes autres particules de masse non nulle.

Une autre façon d'écrire l'énergie et l'impulsion du photon est :

$$E = \hbar\omega \quad \text{et} \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

où  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  est la constante de Planck réduite,  $\omega = 2\pi\nu$  la pulsation et  $\vec{k}$  le vecteur d'onde de module  $2\pi/\lambda$ . Le quadrivecteur énergie impulsion se note :

$$P = \left( \frac{\hbar\omega}{c}, \hbar\vec{k} \right)$$

Sa pseudo-norme est :

$$P^2 = P_i P_i = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \hbar^2 \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) = 0$$

en accord avec le fait que la masse du photon est nulle.

#### 7.1.4 Le référentiel du centre de masse

Considérons un système isolé de  $N$  particules indépendantes, en mouvement dans un référentiel galiléen  $R$ . Dans ce cas il est possible de définir la somme des énergies et la somme des impulsions des différentes particules dans  $R$  :

$$E = \sum_{i=1}^N E_i \quad \text{et} \quad \vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

et donc le quadrivecteur énergie impulsion du système.

Le référentiel du centre de masse de ce système est le référentiel  $R'$  en translation par rapport à  $R$ , dans lequel l'impulsion du système est nulle :

$$\vec{p}^* = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i^*$$

Le quadrivecteur énergie impulsion du système dans  $R^*$  s'écrit alors :

$$P^* = \left( \frac{E^*}{c}, \vec{0} \right)$$

où

$$E^* = \sum_{i=1}^N E_i^*$$

est l'énergie du système dans  $R$ .

Rq : Le terme "centre de masse" peut prêter à confusion car des particules comme le photon n'ont pas de masse. Il est donc impossible de définir comme en mécanique classique, la position du centre de masse. Cette position sera définie par :

$$\vec{r} = \frac{\sum_{i=1}^N E_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N E_i}$$

La transformation de Lorentz permet de passer de  $P$  à  $P'$ . Appelons  $u$  la vitesse de  $R'$  par rapport à  $R$  (parallèle à son axe  $Ox$ ). Si  $p$  n'a qu'une composante suivant cet axe  $Ox$ , ce qui se produit effectivement dans les accélérateurs de particules, alors :

$$\begin{pmatrix} E^*/c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_u & -\beta_u \gamma_u & 0 & 0 \\ -\beta_u \gamma_u & \gamma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec :

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

On déduit la vitesse de  $R^*$  par rapport à  $R$  :

$$\vec{u} = \frac{c^2}{E} \vec{p}$$

qui est constante car  $E$  et  $p$  sont constants puisque le système est isolé. Le référentiel du centre de masse est donc galiléen.

On obtient également l'expression de l'énergie du système dans  $R^*$  :

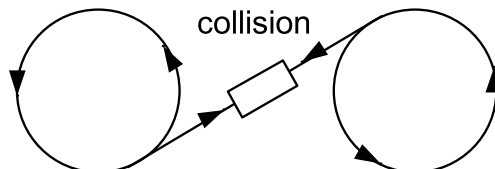
$$E' = \frac{E}{\gamma_u}$$

La valeur de cette énergie est inférieure à celle que l'on mesure dans  $R$ . On peut aussi écrire directement la pseudo-norme du quadrivecteur énergie impulsion du système :

$$\frac{E^*}{c^2} = \frac{E}{c^2} - p^2$$

On voit que l'énergie du système est minimum dans le référentiel du centre de masse.

Ceci a une application dans la collision de particules. Pour fournir le minimum d'énergie dans le référentiel du laboratoire  $R$  à deux particules entrant en collision, il faut s'arranger pour que  $R$  et  $R^*$  coïncident. Ceci est possible en utilisant des anneaux collisionneurs dont le principe est indiqué sur la figure. Dans ce cas les particules ont des vitesses opposées, et si  $\vec{p} = \vec{u} = 0$  alors  $E = E^*$



## 7.2 Chocs élastiques

### 7.2.1 Définitions et propriétés générales

**Définition :** Un choc entre particules est élastique si la nature et le nombre des particules avant la collision, sont conservés après la collision.

Considérons un système de  $N$  particules entrant en collision et supposons qu'avant et après la collision, les particules soient indépendantes les unes des autres. Elles suivent donc des trajectoires rectilignes à des vitesses uniformes. Pendant le choc, il y a interaction entre les particules et en toute rigueur il n'est pas possible de calculer la somme des énergies et des impulsions de ces particules. Nous allons alors supposer que la durée du choc est très courte, et que même si le quadrivecteur énergie impulsion n'est pas défini pendant ce temps, il se conserve avant et après le choc. Cela se traduit, dans un référentiel galiléen  $R$ , par :

$$P^{av} = P^{ap}$$

où  $E_{Ci}$  est l'énergie cinétique de la particule  $i$ . Nous en déduisons la conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement du système :

$$\sum_{i=1}^N E_{Ci}^{av} = \sum_{i=1}^N E_{Ci}^{ap}$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i^{ab} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i^{ap}$$

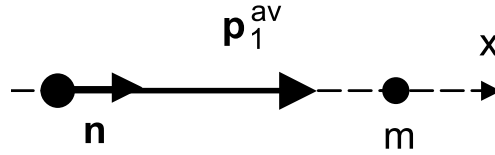
Rq : Très souvent, il est commode d'écrire la conservation du quadrivecteur énergie impulsion avant et après le choc, dans le référentiel du centre de masse  $R^*$  :

$$P^{*av} = P^{*ap}$$

car l'impulsion du système y est nulle.

### 7.2.2 Effet Compton

Nous voulons étudier la collision d'un photon de grande énergie et d'un électron immobile de masse  $m$  dans un référentiel galiléen  $R$ .



Dans l'expérience originale de Compton en 1922, les photons sont émis par un tube à rayons X, avec une longueur d'onde  $\lambda = 0,71 \text{ \AA}$  correspondant à la raie  $K_\alpha$  du molybdène. Ils possèdent donc une énergie  $E = hc/\lambda = 17,5 \text{ keV}$ . Ils entrent en collision avec les électrons de la couche externe des atomes d'une cible en graphite. Ceux-ci sont faiblement liés (quelques électrons-volt) et donc considérés comme libres. Compton détecta deux longueurs d'onde. La première,  $\lambda$ , correspondant au rayonnement incident, et la deuxième,  $\lambda'$ , supérieure à  $\lambda$ , dépendant de l'angle  $\theta$  d'observation.

Déterminons  $\lambda'$  en fonction de l'angle de diffusion  $\theta$  du photon après le choc.

#### Avant le choc dans $R$

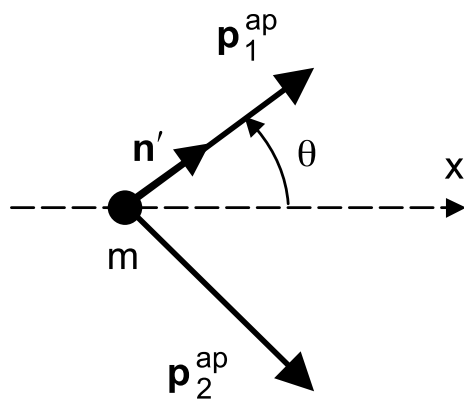
Si  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire porté par la direction du photon incident, et  $\nu$  la fréquence de ce rayonnement, le quadrivecteur énergie impulsion du photon est :

$$P_i^{av} = \left( \frac{E_1^{av}}{c}, \vec{p}_1^{av} \right) = \left( \frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c} \vec{n} \right)$$

et celui de l'électron :

$$P_2^{av} = \left( \frac{E_2^{av}}{c}, \vec{p}_2^{av} \right) = \left( \frac{mc^2}{c}, \vec{0} \right)$$

Après le choc dans R



On note  $\vec{n}'$  le vecteur unitaire porté par la direction du photon diffusé sous l'angle  $\theta$  et  $\nu'$  la fréquence associée à son rayonnement. Le quadrivecteur énergie impulsion de ce photon est :

$$P_1^{ap} = \left( \frac{E_1^{ap}}{c}, \vec{p}_1^{ap} \right) = \left( \frac{h\nu'}{c}, \frac{h\nu'}{c} \vec{n}' \right)$$

et celui de l'électron :

$$P_2^{ap} = \left( \frac{E_2^{ap}}{c}, \vec{p}_2^{ap} \right)$$

La conservation du quadrivecteur énergie impulsion du système, avant et après le choc, permet d'écrire :

$$\begin{cases} \vec{p}_2^{ap} &= \vec{p}_1^{av} - \vec{p}_1^{ap} \\ E_2^{ap} &= E_1^{av} + E_2^{av} - E_1^{ap} \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} \vec{p}_2^{ap} &= h\nu\vec{n} - h\nu'\vec{n}' \\ E_2^{ap} &= h(\nu - \nu') + mc^2 \end{cases}$$

Et puisque  $E_2^{ap} = p^{ap2}c^2 + m^2c^4$ , on obtient :

$$[h(\nu - \nu') + mc^2] = h^2(\nu\vec{n} - \nu'\vec{n}') + m^2c^4$$

Mais  $\lambda = c/\nu$ . Après simplification il vient :

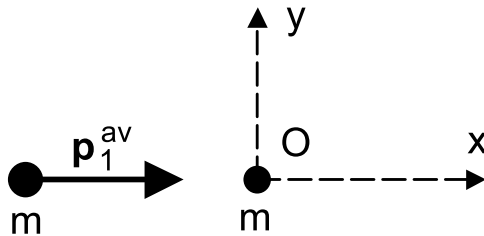
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

La longueur  $h/mc = 0,024 \text{ \AA}$  s'appelle la longueur d'onde Compton de l'électron. Le résultat du calcul en accord avec l'expérience, confirme que le photon possède une quantité de mouvement de module  $h\nu/c$ .

Pour cette expérience, Compton obtint le prix Nobel en 1927.

### 7.2.3 Choc élastique de deux particules identiques, l'une en mouvement, l'autre immobile

Considérons deux particules identiques de masse  $m$ , l'une en mouvement, l'autre au repos, entrant en collision. On note  $R$  le référentiel du laboratoire et  $R'$  le référentiel du centre de masse. Nous voulons connaître dans  $R$ , la quantité de mouvement des deux particules après le choc, soit quatre composantes scalaires dans le plan formé par les directions des deux particules.



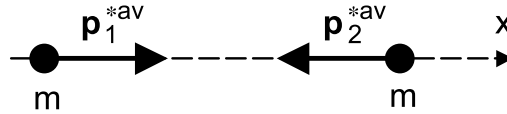
La particule en mouvement possède une énergie  $E^{av}$ . Le module de son impulsion  $p^{av}$  est donné par la relation :

$$p_1^{ac} c = \sqrt{E_1^{av} - m^2 c^4}$$

et sa direction est celle de l'axe  $Ox$ . La particule immobile se trouve à l'origine  $O$  du repère  $Oxy$  lié à  $R$ . Son énergie est  $E^{av}$  son impulsion système. Le quadrivecteur énergie impulsion s'écrit :

$$P^{av} = \left( \frac{E^{av}}{c}, \vec{p}^{ab} \right) = \left( \frac{E_1^{av} + mc^2}{c}, p_1^{ab} \right)$$

Avant le choc dans  $R^*$



A l'aide de la transformation de Lorentz, nous avons obtenu l'expression de l'énergie du système dans  $R^*$  :

$$E^{*av} = \frac{E^{av}}{\gamma} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{cp_1^{av}}{E^{av}}$$

On en déduit :

$$\beta = \frac{\sqrt{E_1^{av2} - m^2 c^4}}{E_1^{av} + mc^2} \quad \text{et} \quad \gamma = \sqrt{\frac{E_1^{av} + mc^2}{2mc^2}}$$

puis :

$$E^{*av} = \sqrt{2mc^2(E_1^{av} + mc^2)}$$

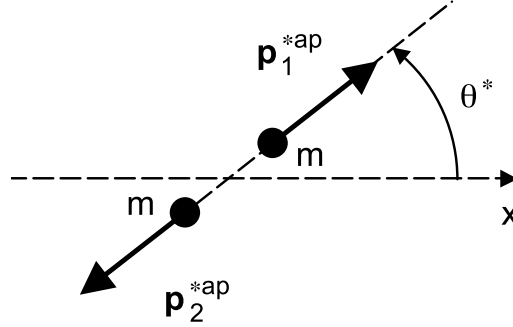
L'impulsion du système étant nulle dans  $R^*$  son quadrivecteur énergie impulsion s'écrit :

$$P^{*av} = \left( \frac{E^{*av}}{c}, \vec{p}^{*ab} \right) = \left( \frac{\sqrt{2mc^2(E_1^{av} + mc^2)}}{c}, \vec{0} \right)$$

Après le choc dans  $R^*$

La conservation du quadri vecteur énergie impulsion avant et après le choc,  $P^{*av} = P^{*ap}$  permet d'écrire :

$$P^* = \left( \frac{E^{*ap}}{c}, \vec{p}^{*ap} \right) = \left( \frac{\sqrt{2mc^2(E_1^{av} + mc^2)}}{c}, \vec{0} \right)$$



La conservation de l'impulsion fournit deux équations scalaires et la conservation de l'énergie une troisième équation :

$$\vec{p}_1^{*ap} + \vec{p}_2^{*ap} = \vec{0}$$

$$E_1^{*ap} + E_2^{*ap} = \sqrt{2mc^2(E_1^{av} + mc^2)}$$

Mais nous avons déjà noté que le problème comporte quatre 2 inconnues. Donnons-nous alors un paramètre supplémentaire ; l'angle d'éjection de la particule 1, dans  $R^*$ . Nous l'appelons  $\theta'$ .

Puisque  $\vec{p}_2^{*ap} = -\vec{p}_1^{*ap}$ , l'angle d'éjection de la particule 2 est  $\theta' - \pi$

L'égalité  $p_1^{*ap} = p_2^{*ap}$  implique :

$$E_1^{*ap2} = p_1^{*ap2} + m^2c^4 = p_2^{*ap2}c^2 + m^2c^4 = E_2^{*ap2}$$

et donc :

$$E_1^{*ap} = E_2^{*ap} = \sqrt{\frac{mc^2(E_1^{av} + mc^2)}{2}}$$

En utilisant la relation  $p_1^{*ap}c = \sqrt{E_1^{*ap2} - m^2c^4}$  il vient :

$$p_1^{*ap} = p_2^{*ap} = \sqrt{\frac{mc^2(E_1^{av} - mc^2)}{2}}$$

Les composantes du quadrivecteur énergie impulsion de chaque particule s'écrivent :

$$(P_1^{*ap})_i = \left( \frac{E_1^{*ap}}{c}, p_1^{*ap} \cos \theta^*, p_1^{*ap} \sin \theta^*, 0 \right)$$

$$(P_2^{*ap})_i = \left( \frac{E_2^{*ap}}{c}, -p_2^{*ap} \cos \theta^*, -p_2^{*ap} \sin \theta^*, 0 \right)$$

Après le choc dans  $R^*$

Pour obtenir les quadrivecteurs énergie impulsion des particules dans le référentiel du laboratoire, il suffit d'utiliser la transformation de Lorentz inverse, donnant les composantes de  $P_1^{ap}$  et  $P_2^{ap}$  en fonction de celles de  $P_1^{*ap}$  et  $P_2^{*ap}$ . Pour la première particule cette transformation s'écrit :

$$E_1^{ap} = \gamma(E_1^{*ap} + up_{1x}^{*ap}) = \frac{E_1^{av} + mc^2}{2} + \frac{E_1^{av} - mc^2}{2} \cos \theta^*$$

$$p_{1x}^{ap} = \gamma \left( p_1^{*ap} + \frac{u}{c^2} E_1^{*ap} \right) = \frac{1 + \cos \theta^*}{2c} \sqrt{E_1^{av2} - m^2c^4}$$

$$p_{1y}^{ap} = p_{1y}^{*ap} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{mc^2(E_1^{av} - mc^2)}{2}}$$

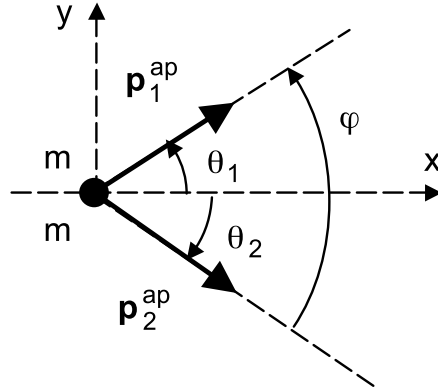
$$p_{1z}^{ap} = p_{1z}^{*ap} = 0$$

Le module de l'impulsion de la particule 1 est donné par la relation fondamentale de la dynamique :

$$p_1^{ap} = \frac{1}{c} \sqrt{\left( \frac{E_1^{av} + mc^2}{2} + \frac{E_1^{av} - mc^2}{2} \cos \theta' \right)^2 - m^2c^4}$$

et sa direction, par l'angle d'éjection  $\theta_1$  mesuré dans  $R$  et tel que :

$$\tan \theta_1 = \frac{p_{1y}^{ap}}{p_{1x}^{ap}} = \frac{\sin \theta^*}{1 + \cos \theta^*} \sqrt{\frac{2mc^2}{E_1^{av} + mc^2}}$$



Pour la particule 2, le raisonnement est le même. On obtient :

$$p_2^{ap} = \frac{1}{c} \sqrt{\left( \frac{E_1^{av} + mc^2}{2} - \frac{E_1^{av} - mc^2}{2} \cos \theta' \right)^2 - m^2 c^4}$$

et :

$$\tan \theta_2 = \frac{p_{2y}^{ap}}{p_{2x}^{ap}} = \frac{-\sin \theta^*}{1 - \cos \theta^*} \sqrt{\frac{2mc^2}{E_1^{av} + mc^2}}$$

L'angle d'éjection entre les deux particules est  $\varphi = \theta_1 - \theta_2$ . A l'aide de la relation :

$$\tan \varphi = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2}$$

il vient après calcul :

$$\tan \varphi = \frac{2\sqrt{2mc^2(E_1^{av} + mc^2)}}{(E_1^{av} - mc^2) \sin \theta^*}$$

En relativité restreinte  $0 < \varphi < \pi/2$  alors que, à la limite classique  $v \ll c$ ,  $E_1^{av} = mc^2$  et  $\varphi = \pi/2$ .

## 7.3 Chocs inélastiques

### 7.3.1 Définition et propriétés générales

**Définition :** Un choc entre particules est inélastique si la nature ou le nombre des particules avant la collision n'est pas conservé après la collision.

Considérons un système isolé de  $N$  particules de masse  $m_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , pouvant entrer en collision. Après le choc, nous aurons un système de  $Q$  particules (avec a priori  $Q \neq N$ ) de masse  $m_j$ ,  $1 \leq j \leq Q$ . Si ces particules sont indépendantes les unes des autres, nous pouvons définir la somme des énergies et la somme des impulsions des particules, puis le quadri-vecteur énergie impulsion du système avant et après le choc, dans un référentiel galiléen  $R$ . Le système étant isolé, ce quadri-vecteur se conserve et nous pouvons écrire :

$$P^{av} = P^{ap}$$

D'où

$$\sum_i^N (m_i c^2 + E_{Ci}^{av}) = \sum_j^Q (m_j c^2 + E_{Cj}^{av}) \quad \text{et} \quad \sum_i^N \vec{p}_i^{av} = \sum_j^Q \vec{p}_j^{av}$$

L'énergie cinétique du système n'est plus conservée puisque :

$$\sum_i^N m_i c^2 \neq \sum_j^Q m_j c^2$$

Appelons "défaut de masse" la quantité :

$$\Delta m = \sum_i^N m_i - \sum_j^Q m_j$$

et la variation d'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum_i^N E_{Ci}^{av} - \sum_j^Q E_{Cj}^{av}$$

La loi de conservation de l'énergie relativiste s'écrit alors :

$$\Delta E_C = \Delta mc^2$$

C'est la formule très célèbre qu'Einstein découvrit en 1905. Elle traduit l'équivalence entre la masse et l'énergie. Dans une réaction (collision ou désintégration), si la masse totale des particules formées augmente, l'énergie cinétique totale de ces particules diminue, et inversement. Il y a conversion de l'énergie de masse en énergie cinétique.

### 7.3.2 Energie de seuil

L'énergie minimum des particules émises après une collision, est la somme des énergies de masse de chacune de ces particules. L'énergie cinétique du système est alors nulle, ainsi que son impulsion. De ce fait, le référentiel d'étude est le référentiel du centre de masse.

Définition : L'énergie de seuil, de production de  $Q$  particules lors d'une collision inélastique, est l'énergie cinétique minimum des  $N$  particules incidentes, permettant de créer des particules au repos dans leur référentiel du centre de masse.

Calculons l'énergie cinétique minimum que doit posséder une particule de masse  $m_1$  entrant en collision avec une particule immobile de masse  $m_2$ , pour former  $Q$  particules de masse  $m_j$ . Pour cela écrivons l'invariance de la pseudo-norme du quadrivecteur énergie impulsion du système dans  $R$  et  $R'$ , avant le choc :

$$P^{av2} = P^{*av2}$$

Dans  $R^*$ , il y a conservation de ce quadrivecteur avant et après le choc, donc également conservation de sa pseudo-norme :

$$P^{*av2} = P^{*ap2}$$

D'où :

$$P^{av2} = P^{*ap2}$$

relation qui s'écrit aussi :

$$E^{av2} - p^{av2}c^2 = E^{*ap2}$$

avec :

$$E^{av} = E_1^{av} + mc^2$$

$$p^{av2}c^2 = p_1^{av2}c^2 = E_1^{av2} - m_1c^4$$

$$E^{*ap} = \sum_j^Q m_j c^2$$

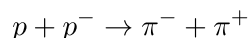
En notant  $E_1^{av} = (E_{C1}^{av})_{min} + m_1c^2$

$$(E_{C1}^{av})_{min} = \frac{\left(\sum_j^Q m_j c^2\right)^2 - (m_1c^2 + m_2c^2)^2}{2m_2c^2}$$

### Applications

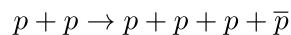
- Si  $m_1 + m_2 \geq \sum_j^N m_j$

Il n'y a pas d'énergie de seuil. La réaction est toujours possible. Les particules émises posséderont une énergie cinétique dans  $R^*$ . C'est le cas de la réaction proton-antiproton de même masse,  $938,3 \text{ MeV}/c^2$ , donnant naissance à un méson  $\pi^-$  et son antiparticule  $\pi^+$  de même masse, égale à  $139,6 \text{ MeV}/c^2$



- Si  $m_1 + m_2 < \sum_j^N m_j$

Il y a une énergie de seuil. C'est le cas de la réaction entre deux protons, l'un accéléré et l'autre immobile, permettant de créer une paire proton-antiproton suivant :



Toutes les particules ont la même masse  $938,3 \text{ MeV}/c^2$ . L'énergie de seuil ou énergie cinétique minimum du proton incident est :

$$(E_1^{av})_{min} = 6mc^2 = 5,63 \text{ GeV}$$

L'énergie minimum totale du système avant la collision dans  $R$  est donc :

$$(E_1^{av})_{min} = 8mc^2 = 7,51 \text{ GeV}$$

On peut calculer sa valeur dans le référentiel du centre de masse  $R'$  en utilisant les relations déjà rencontrées :

$$E^{*av} = \frac{E^{av}}{\gamma} \quad \text{et} \quad \gamma = \sqrt{\frac{E_1^{av} + mc^2}{2mc^2}}$$

On obtient  $\gamma = 2$  et :

$$(E_{1av})_{min} = 4mc^2 = 3,75 \text{ GeV}$$

Dans les anneaux collisionneurs, il suffira d'apporter à chaque proton l'énergie cinétique  $mc^2$ , soit au total  $E_C^{av} = 2mc^2$ . Cette valeur reste inférieure à  $6mc^2$ , énergie cinétique qu'il faut donner à un proton lorsque l'autre est fixe.

Si l'on veut obtenir des particules prévues par les théories, dévoilant la structure profonde de la matière, l'énergie de seuil des réactions mises en jeu devient considérable. Actuellement, la recherche du boson de Higgs dont la masse est estimée à environ  $150 \text{ GeV}/c^2$  est de toute première importance, car cette particule (du nom de son inventeur) serait à l'origine de la masse des constituants de la matière. Elle a été aperçue au L.E.P. (Large Electron-Positron collider) de Genève en l'an 2000, pour une énergie de collision de  $200 \text{ GeV}$  dans  $R^*$ . Mais les données n'ont pas permis une interprétation statistique claire en faveur de son existence. Il faudra donc attendre la transformation du L.E.P. en L.H.C. (Large Hadron Collider) vers 2008 pour peut-être mettre en évidence expérimentalement cette particule.

### 7.3.3 Désintégration d'une particule instable

Considérons une particule instable de masse  $m$ , immobile dans le référentiel du laboratoire  $R$ . Elle peut se désintégrer spontanément et donner naissance à  $Q$  particules de masse  $m_j$ , dont le référentiel du centre de masse  $R'$  s'identifie avec le référentiel du laboratoire  $R$ . Avant et après la désintégration, il y a conservation du quadrivecteur énergie impulsion :

$$P^{av} = P^{ap}$$

D'où

$$mc^2 = \sum_j^Q E_j^{ap}$$

$$\vec{0} = \sum_j^Q \vec{p}_j^{ap}$$

Si toutes les particules formées sont au repos dans  $R$  :

$$m = \sum_j^Q m_j$$

La réaction est donc énergétiquement possible si :

$$m \geq \sum_j^Q m_j \quad \text{ou} \quad \Delta m = \sum_j^Q m_j - m \leq 0$$

Dans le cas particulier où la désintégration d'une particule au repos dans  $R$ , donne naissance à deux autres particules, calculons leur énergie relativiste dans  $R$ . La conservation du quadrivecteur énergie impulsion s'écrit :

$$mc^2 = E_1^{ap} + E_2^{ap}$$

$$\vec{0} = \vec{p}_1^{ap} + \vec{p}_2^{ap}$$

La deuxième relation donne  $p_1^{ap} = p_2^{ap}$ , et la relation fondamentale de la dynamique :

$$E_1^{ap2} = p_1^{ap2} c^2 + m_1^2 c^4$$

$$E_2^{ap2} = p_2^{ap2} c^2 + m_2^2 c^4$$

Par soustraction :

$$E_1^{ap2} - E_2^{ap2} = (m_1^2 - m_2^2) c^4$$

et en divisant par  $mc^2 = E_1^{ap} + E_2^{ap}$  il vient :

$$E_1^{ap} - E_2^{ap} = \frac{m_1c^2 - m_2c^2}{m}c^2$$

Finalement :

$$E_1^{ap} = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m}c^2$$

$$E_2^{ap} = \frac{m^2 + m_2^2 - m_1^2}{2m}c^2$$

La diminution de la masse du système  $|\Delta m| = m - m_1 - m_2$  libère l'énergie cinétique :

$$|\Delta m|c^2 = mc^2 - m_1c^2 - m_2c^2 = E_1^{ap} + E_2^{ap} - m_1c^2 - m_2c^2 = E_{C1}^{ap} + E_{C2}^{ap}$$

### Applications

La désintégration du méson  $K^+$  de masse  $493,7 \text{ MeV}/c^2$  en méson  $\pi^+$  et  $\pi^0$  de masse  $139,6 \text{ MeV}/c^2$  :

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$$

ou en méson  $\pi^-$  et  $\pi^+$  de masse  $139,6 \text{ MeV}/c^2$  :

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^+$$

La désintégration du neutron ( $m_n = 939,6 \text{ MeV}/c^2$ ), en proton ( $m_p = 938,3 \text{ MeV}/c^2$ ), électron  $m_e = 0,5110 \text{ MeV}/c^2$ ) et antineutrino électronique de masse considérée comme nulle :

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

### 7.3.4 Etude des noyaux

Jusqu'à présent, nous avons étudié des systèmes constitués de particules indépendantes, ce qui nous a permis de définir un quadrivecteur énergie impulsion.

Considérons maintenant un système de particules en interaction. Nous pouvons définir la somme des énergies et la somme des impulsions des particules puis le quadrivecteur énergie impulsion du système s'il y a simultanéité des événements dans différents référentiels

galiléens. Ceci est possible lorsque le système est concentré en un point de l'espace. Pratiquement, ces systèmes sont des atomes, des noyaux atomiques ou même des particules tel que le proton constitué de trois quarks, tous confinés dans un très petit volume d'espace.

Le quadrivecteur d'un tel système, constitué de  $N$  particules de masse  $m_i$  en interaction, s'écrit :

$$P^{av} = \left( \frac{E^{av}}{c}, \vec{p}^{ab} \right) \text{ avec } E^{av} = \sum_i E_i^{av} + \frac{1}{2} \sum_{i,k} E_{j,k}^{av} \text{ et } \vec{p}^{ab} = \sum_i \vec{p}_i^{ab}$$

où  $E_{i,k}^{av}$  est l'énergie potentielle d'interaction entre la particule  $i$  et la particule  $k$ . La masse  $M$  du système est définie par la relation :

$$Mc^2 = \sqrt{E^{av2} - p^{av2}c^2}$$

Si dans une réaction, les  $N$  particules de ce système lié se libèrent et donnent naissance à  $Q$  particules indépendantes de masse  $m$ , la somme des énergies de masse de toutes les particules après la réaction est :

$$\sum_i^Q m_j c^2 = \sum_i^Q \sqrt{E_j^{ap2} - p_j^{ap2} c^2}$$

La masse  $M$  du système lié n'est pas égale a priori, à la somme des masses des particules après la réaction. Cela dépend de l'énergie potentielle d'interaction et de l'énergie cinétique des particules. Deux cas se présentent suivant que le défaut de masse :

$$\sum_j^Q m_j c^2 = \sum_j^Q \sqrt{E^{av2} - p^{av2} c^2}$$

est positif ou négatif.

Pour aller plus loin, concentrons-nous sur l'étude du noyau atomique. Rappelons que l'on note  ${}^A_Z X$  un noyau formé de  $Z$  protons,  $A$  nucléons et  $N = A - Z$  neutrons. Il est également appelé nucléide. La cohésion des nucléons est assurée par l'interaction forte attractive. Le rayon du noyau est de l'ordre du fermi ( $1 f_m = 10^{-15} \text{ m}$ ).

### Noyaux stables

Un noyau est stable si :

$$\Delta m > 0$$

On note  $m_p$  la masse du proton,  $m_n$  la masse du neutron et  $M$  la masse du noyau.

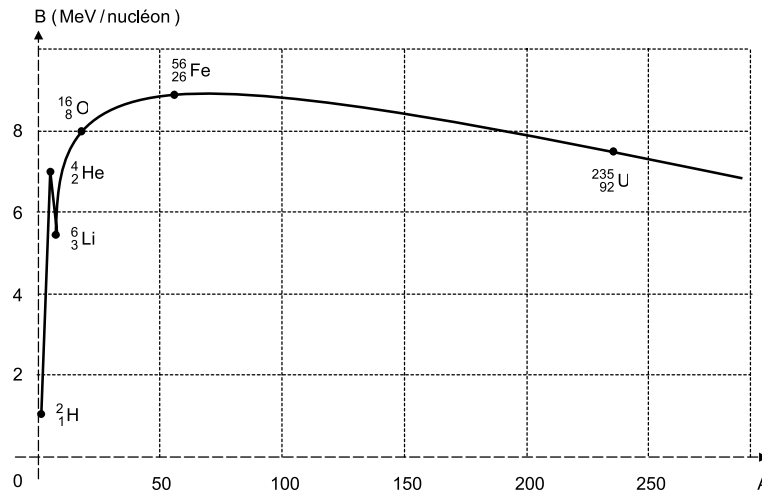
$$\Delta m = (A - Z)m_n + Zm_p - M$$

L'énergie minimum nécessaire à briser le noyau en ses différentes particules est l'énergie de liaison :

$$E_l = \Delta mc^2$$

Elle ne donne pas d'énergie cinétique aux particules indépendantes ainsi libérées. On définit également l'énergie moyenne de liaison par nucléon :

$$B = \frac{E_l}{A}$$



La courbe d'Aston représente  $B$  en fonction de  $A$  pour tous les noyaux. Le noyau  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$  est le plus stable pour une énergie de liaison par nucléon de 8,8 MeV.

### Applications

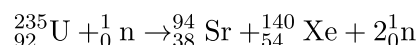
Il est alors possible d'obtenir de l'énergie à partir de réactions nucléaires formant des produits plus stables que les réactifs utilisés. L'énergie produite correspond à la perte de

masse entre les nucléides produits et les nucléides réagissants initialement. D'après la courbe d'Aston, deux types de réactions sont possibles : la fission et la fusion nucléaire.

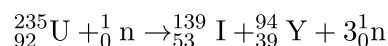
#### Les réactions de fission nucléaire

Un neutron est capté par un noyau lourd pour former un noyau instable. Celui-ci se scinde et donne des noyaux plus légers et plus stables.

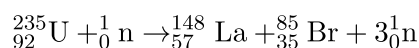
Par exemple, un noyau d'Uranium peut capter un neutron et produire du Strontium et du Xénon :



L'énergie de liaison par nucléon de l'Uranium est de 7,7 MeV. Si celles des produits formés sont proches du maximum, 8,8MeV, alors l'énergie libérée est égale à la différence, environ 1MeV nucléon. Et au total pour 235 nucléons, la réaction fournit environ 235 MeV. Un calcul plus précis tenant compte de l'énergie de liaison exacte des nucléides formés (ou de façon équivalente, de leur masse) montre que cette réaction libère 187 MeV. Cette énergie est considérable. A titre de comparaison, 1 g d'Uranium dégage une énergie équivalente à la combustion de 1,8 t de pétrole. D'autres réactions sont possibles. Si les produits sont de l'Iode et de l'Yttrium :



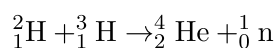
ou du Lanthane et du Brome :



C'est ce type de réaction qui est mis en œuvre dans les centrales nucléaires et les bombes atomiques. Malheureusement, les produits de fission sont radioactifs et polluent.

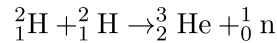
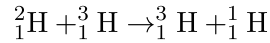
#### Les réactions de fusion nucléaire

Deux éléments légers fusionnent pour donner un élément plus lourd et plus stable. Par exemple, la fusion du deutérium et du tritium produit de l'hélium et un neutron :



L'énergie à fournir est environ de 2 MeV pour scinder  ${}_1^2\text{H}$  en ses particules et de 9 MeV pour  ${}_1^3\text{H}$ , donc au total 11 MeV. L'énergie produite par la formation de  ${}_2^4\text{He}$  à partir de ses particules élémentaires est de 28 MeV. La réaction libère la différence d'énergie, soit 17 MeV.

Citons d'autres exemples :



Ce sont des réactions thermonucléaires qui se produisent à l'intérieur des étoiles. Elles sont aussi à l'origine de la bombe H. Mais actuellement, on ne sait pas les contrôler.

### Noyaux instables

Un noyau est instable si

$$\Delta m \leq 0$$

Dans ce cas, le noyau se désintègre spontanément et libère une énergie :

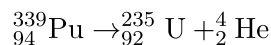
$$E = |\Delta m|c^2$$

qui correspond à l'énergie cinétique des produits de fission et à l'énergie rayonnée ; c'est la radioactivité.

### Applications

Il existe trois types de radioactivité  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ , correspondant à l'émission de particules  $\alpha$  (noyau de  ${}^4_2\text{He}$ ), de particules  $\beta$  (électrons  $e^-$  pour la radioactivité  $\beta^-$  et positons  $e^+$  pour la radioactivité  $\beta^+$ ) et de rayonnement  $\gamma$  accompagnant les deux précédentes.

Prenons l'exemple de la désintégration du Plutonium par radioactivité  $\alpha$  :



Cette situation est analogue à la désintégration d'une particule traitée avant, les noyaux remplacent les particules. Les relations que nous avons obtenues permettent de calculer l'énergie cinétique des noyaux d'Uranium et d'Hélium. On identifie les masses atomiques à celles des noyaux, car la masse d'un électron est faible devant celle d'un nucléon, et avec les masses des noyaux :

$$M_{Pu} = 222,6771 \text{ GeV}/c^2$$

$$M_U = 218,9434 \text{ GeV}/c^2$$

$$M_{He} = 4,0026 \text{ GeV}/c^2$$

les énergies relativistes des noyaux d'Uranium et d'Hélium sont :

$$E_U = \frac{M_{Pu}^2 + M_U^2 - M_{He}^2}{2M_{Pu}} c^2 = 218,9435 \text{ GeV}$$

$$E_{He} = \frac{M_{Pu}^2 + M_{He}^2 - M_U^2}{2M_{Pu}} c^2 = 3,7336 \text{ GeV}$$

On en déduit les énergies cinétiques :

$$E_{cU} = E_U - M_U c^2 = 0,0888 \text{ MeV}$$

$$E_{cHe} = E_{He} - M_{He} c^2 = 5,2206 \text{ MeV}$$

Elles sont très inférieures aux énergies de masse. L'approximation classique aurait donc suffi pour le calcul. Le noyau d'Hélium plus léger que le noyau d'Uranium est bien sur éjecté avec une vitesse plus grande. La somme de ces énergies est :

$$E_{cU} + E_{cHe} = 5,3094 \text{ MeV}$$

Elle devrait correspondre à la perte de masse :

$$|\Delta m| = M_{Pu} - M_U - M_{He} = 5,3095 \text{ MeV}/c^2$$

En réalité, l'énergie cinétique de la particule  $\alpha$  est plus faible car l'Uranium est créé dans un état excité. Il revient à un niveau stable en émettant un rayonnement  $\gamma$  d'un ou plusieurs photons. La réaction s'écrit :



### Conclusion

La conservation du quadrvecteur énergie impulsion exprime la conservation de l'énergie et la conservation de l'impulsion. L'énergie relativiste comprend un terme de masse, un terme

cinétique et éventuellement un terme d'interaction potentielle pour un système lié. Sa conservation au cours d'une collision ou d'une réaction permet la création ou l'annihilation de particules massiques. La variation de l'énergie de masse est compensée par la variation d'énergie cinétique et potentielle du système. C'est l'équivalence masse-énergie, dont on peut tirer profit dans les centrales nucléaires. Mais ces lois de conservation ne sont pas les seules. Il en existe d'autres telles que la conservation de la charge ou du nombre leptonique  $L = \pm 1$  attribué aux leptons (fermions légers  $e^-$  et  $\mu^-$ ).

## Notion de viscosité d'un fluide. Ecoulement d'un fluide



### Bibliographie

- *Hydrodynamique*, Guyon, CNRS éditions
- *Toute la mécanique*, Bocquet, Faroux, Renault, Dunod
- *Mécanique*, Pérez, Masson
- *H-prépa : Mécanique des fluides*, Hachette
- *Physique expérimentale*, Fruchart, p. 432
- *Montages de physique*, Charmont, p. 9

### Prérequis :

- Cinématique des fluides
- Dynamique des fluides parfaits

### Introduction :

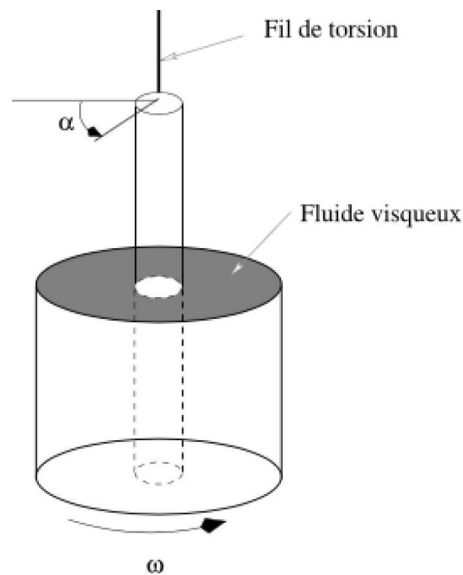
D'après leur structure tous les fluides sont visqueux. Le modèle du fluide parfait ne peut donc décrire de façon satisfaisante que certains types d'écoulements bien particuliers. En

fait, il ne fait pas de différence entre l'huile et l'eau, alors que ces deux fluides ne s'écoulent pas de la même manière dans un tuyau. Nous allons donc introduire la notion de viscosité, avec toutes ses conséquences, puis étudier la caractérisation des écoulements visqueux avec notamment l'introduction du nombre de Reynolds.

## 8.1 Notion de viscosité

### 8.1.1 Fluides newtoniens

#### Expérience de Couette



Considérons un fluide enfermé entre deux cylindres, l'un mobile, l'autre fixé via un fil de torsion. On constate que lorsque la cavité cylindrique extérieure est mise en rotation à la vitesse angulaire  $\omega$ , le cylindre intérieur tourne d'un angle  $\alpha$  par rapport à sa position d'équilibre.

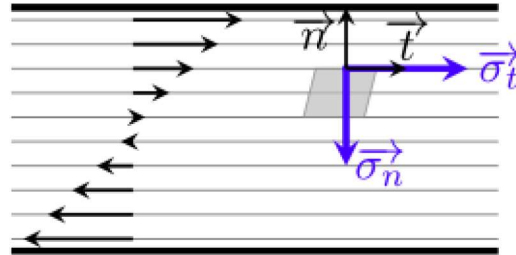
Analysons en détail le phénomène :

La torsion du fil conduit à l'existence d'un couple dont les forces de pression ne peuvent pas être responsables. On est donc obligé d'admettre l'existence d'efforts tangentiels.

On observe que les particules de fluide adhèrent aux parois. Il existe donc un gradient de vitesse au sein de l'écoulement.

Pour les fluides simples, l'angle  $\alpha$  augmente proportionnellement à  $\omega$ . Les efforts tangentiels augmentent donc proportionnellement au gradient de vitesse.

**Interprétation :**



L'expérience montre que, lors de l'écoulement d'un fluide, la pression ne suffit pas à expliquer les phénomènes et qu'il convient d'introduire des forces tangentielles qui s'opposent au mouvement du fluide. Ces forces, de type frottement, dues aux interactions entre molécules du fluide, sont appelées forces de viscosité. La contrainte (force par unité de surface)  $\vec{\sigma}$  qu'exerce une couche de fluide supérieure sur un élément de surface d'une couche de fluide inférieure, s'écrit :

$$\vec{\sigma}_{1 \rightarrow 2} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \sigma_n \vec{n} + \sigma_t \vec{t} \quad \text{avec} \quad \sigma_n = -p$$

### Fluide newtonien

Entre deux couches successives de fluide en écoulement unidimensionnel à la vitesse  $\vec{v}$ , il existe des contraintes tangentielles à l'écoulement qui accélèrent la couche la plus lente et ralentissent la couche la plus rapide. Par définition d'un fluide newtonien, les forces visqueuses sont proportionnelles à la différence de vitesse c'est-à-dire au gradient de vitesse.

**Définition :**

$$\sigma_t = \eta \frac{\partial v}{\partial n} = \eta \dot{\gamma}$$

où  $\frac{\partial v}{\partial n}$  désigne le gradient de vitesse dans la direction normale à la surface. De manière générale, la contrainte visqueuse varie comme la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . La constante de proportionnalité  $\eta$  est caractéristique du fluide et désigne la viscosité dynamique du fluide.

### 8.1.2 Mesure de viscosité

L'analyse dimensionnelle de la relation donne

$$[\eta] = \frac{[F]}{L^2} \frac{[v]}{L} = \frac{[F]}{L^2} [T]$$

Ainsi, la viscosité est homogène à une pression  $\times$  temps. On l'exprime indifféremment en pascal.seconde (Pa.s) ou en poiseuille (Pℓ) en hommage à Jean-Louis Marie Poiseuille (1797-1869) fut élève de l'École Polytechnique avant d'étudier la médecine. Les recherches de Poiseuille ont porté principalement sur l'hémodynamique, c'est-à-dire l'étude de la circulation sanguine et lui ont permis de dégager une loi sur l'écoulement des fluides visqueux dans des tubes capillaires. Le viscosimètre est l'appareil de mesure de la viscosité. Différents types de viscosimètre existent suivant le type de fluide utilisé. Pour les liquides, on utilise essentiellement le viscosimètre de Couette ou le viscosimètre à tube capillaire.

#### Ordres de grandeur

Pour les liquides, la viscosité varie fortement avec la température (elle diminue lorsque la température augmente). Pour des liquides purs, elle suit une loi du type

$$\eta \propto e^{b/T}$$

Quant aux gaz, leur viscosité est plus difficile à mesurer Sa détermination peut se faire à l'aide d'une :

- mesure de vitesse (viscosimètre à bille roulante, viscosimètre à tube capillaire)
- mesure de fréquence de résonance d'une onde de cisaillement (viscosimètre à cristal piézo-électrique de torsion) car beaucoup plus faible que celle des liquides. Elle dépend peu de la pression et augmente légèrement avec la température (à peu près comme  $\sqrt{T}$ ).

### 8.1.3 Fluides non newtoniens

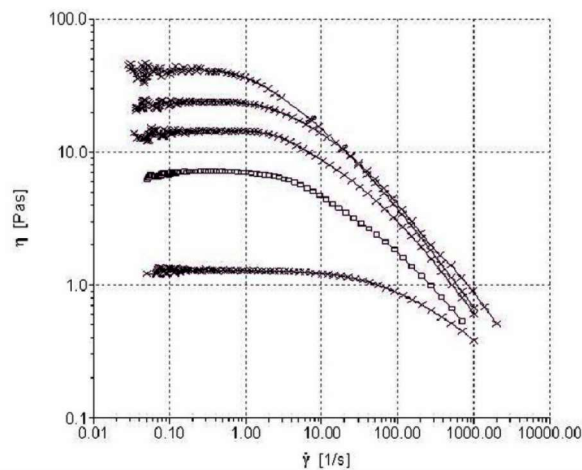
Le comportement newtonien ( $\sigma = \eta \dot{\gamma}$ ) s'observe :

- dans tous les gaz ;
- dans les liquides simples constitués de petites molécules (l'eau par exemple)
- dans les solutions contenant des ions ou molécules à symétrie sphérique.

Cependant la rhéologie Étude du comportement des fluides en écoulement montre qu'il existe des fluides pour lesquels la relation entre contrainte tangentielle et cisaillement est plus complexe.

Liquide (20°C)	Viscosité (mPa.s)
Eau	1,0
Mercure	1,5
Huile d'olive	840
Glycérine pure	1500
Gaz	Viscosité (μPa.s)
Vapeur d'eau (20°C)	9,7
Air sec (20°C)	18,2
He (25°C)	19,9
N <sub>2</sub> (25°C)	17,7

### Comportement non linéaire



Certains fluides vérifient la relation

$$\sigma_t = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}$$

où  $\eta(\dot{\gamma})$  représente une viscosité apparente. Lorsque  $\eta(\dot{\gamma})$  diminue avec  $\dot{\gamma}$ , le fluide coule d'autant plus facilement qu'il est cisailé. On parle alors de fluide rhéofluidifiant (sang, polymère fondu, etc.). Le comportement inverse est désigné par le terme rhéoépaississant

(amidon+eau). Il existe également des liquides, comme les peintures, qui ne coulent que si la contrainte dépasse une valeur seuil.

### Comportement visco-élastique

Tout fluide se caractérise par un temps de relaxation viscoélastique  $\tau_{ve}$ . Lorsque un fluide est soumis à une contrainte, on distingue trois types de comportement en fonction du temps d'observation  $t$ .

- si  $t \ll \tau_{ve}$  le fluide adopte un comportement élastique (déformation proportionnelle à la contrainte),
- si  $t \gg \tau_{ve}$  le fluide adopte un comportement visqueux (vitesse de cisaillement proportionnelle à la contrainte  $\sigma = \eta \dot{\gamma}$ ).
- si  $t \simeq \tau_{ve}$ , le comportement est alors plus complexe ; il est dit visco-élastique,

C'est pourquoi, du point de vue mécanique, la distinction entre un solide et un liquide est artificielle. Ce que l'on appelle communément un liquide est un fluide viscoélastique de petit temps de relaxation ( $\tau_{ve} = 1$  ns pour l'eau) et ce que l'on appelle un solide peut être vu comme un fluide viscoélastique de grand temps de relaxation ( $\tau_{ve} = 10^6$  ans pour le manteau de la croûte terrestre).  $\tau_{ve}$  dépend fortement de la température ce qui confère à certains systèmes un comportement fluide ou solide suivant la température (bitume par exemple).

Matériaux	$\tau_{ve}$ (s)
eau (20°C)	1 ns
verre à vitre (400°C)	32 ans
verre à vitre (20°C)	$10^{26} - 10^{30}$ s
bitume (-5°C)	10 s
bitume (40°C)	1 ms

Un exemple de fluide viscoélastique est la pâte de silicone connue sous le nom de silly-putty. Une boule de silly-putty rebondit sur le sol comme une balle élastique (aux temps courts) mais s'étale comme un fluide visqueux (aux temps longs) si on la pose sur une surface horizontale.

## 8.2 Dynamique d'un écoulement visqueux

Lorsque le fluide est newtonien et incompressible, les équations de Newton appliquées à chaque particule de fluide prennent la forme des équations de Navier-Stokes

### 8.2.1 Bilan des forces

Plaçons nous dans un référentiel galiléen et effectuons un bilan des forces sur une particule de fluide située en  $M$  à l'instant  $t$ , de masse  $dm = \mu(M, t) d\tau$ . En plus des forces de pression et des forces extérieures volumiques, il faut ajouter la résultante des forces visqueuses :

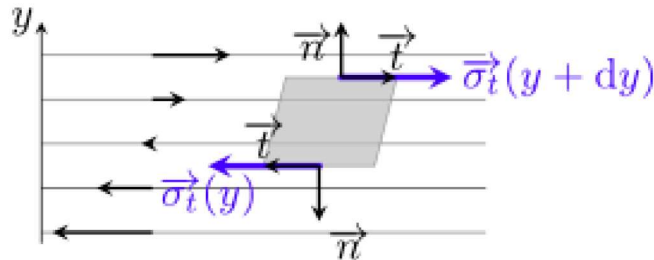
$$d\vec{F} = \left( \vec{f}_{v,ext} - \vec{\nabla}p \right) d\tau + d\vec{F}_\eta$$

L'expression de  $d\vec{F}_\eta$  est en général assez compliquée mais elle se simplifie dans le cas des fluides newtoniens et incompressibles.

Cas d'un écoulement parallèle unidimensionnel

Calculons la résultante des forces visqueuses dans le cas particulier simple d'un écoulement suivant  $(Ox)$  avec un gradient de vitesse suivant  $(Oy)$  :

$$\vec{v} = v(y)\vec{u}_x$$



On remarque ici que  $\text{div}\vec{v} = 0$ . L'écoulement est donc bien incompressible. Dans ce cas, la résultante des forces visqueuses s'exerçant sur une particule de fluide, s'écrit :

$$d\vec{F}_\eta = \eta \left[ \frac{dv}{dy}(y + dy) - \frac{dv}{dy}(y) \right] dx dz \vec{u}_x = \eta \frac{d^2\vec{v}}{dy^2} d\tau$$

On voit apparaître une force volumique qui s'exprime comme le laplacien de la vitesse. Cette formule obtenue dans un cas particulier se généralise aux écoulements incompressibles des fluides newtoniens.

On admettra que pour un fluide newtonien incompressible, la résultante des forces visqueuses s'écrit

$$d\vec{F}_\eta = \eta \Delta \vec{v} d\tau$$

où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien.

### 8.2.2 Équation de Navier-Stokes

D'après la seconde loi de Newton appliquée à une particule de fluide, on a :

$$\mu d\tau \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p d\tau + \vec{f}_{v,\text{ext}} d\tau + d\vec{F}_\eta \quad \text{avec} \quad d\vec{F}_\eta = \eta \Delta \vec{v} d\tau$$

En divisant par  $d\tau$ , on obtient l'équation de Navier-Stokes.

Équation de Navier-Stokes :

Pour un fluide incompressible newtonien, la dynamique de l'écoulement vérifie l'équation

$$\mu \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \vec{f}_{v,\text{ext}} + \eta \Delta \vec{v}$$

Il s'agit donc d'une équation aux dérivées partielles du second ordre et non linéaire. Cette équation recelle encore quelques mystères qui résistent à la sagacité de nos meilleurs mathématiciens puisque l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation de Navier-Stokes est l'un des 7 problèmes du millénaire mis à prix 1 000 000 dollars par l'Institut Clay

#### Conditions aux limites

L'équation de Navier-Stokes étant une équation du second ordre, sa résolution introduit deux constantes d'intégration pour la pression  $p$  et pour la vitesse  $\vec{v}$ . On les détermine en appliquant les conditions aux limites suivantes :

- continuité de la vitesse à la traversée d'une interface
- continuité de la contrainte normale et donc de la pression
- continuité de la contrainte tangentielle.

### 8.2.3 Le nombre de Reynolds

La complexité provient essentiellement de la présence, dans l'équation de Navier-Stokes, d'un terme non linéaire le terme convectif et d'un terme du second ordre le terme de viscosité. Dans de nombreux cas, on peut négliger l'un des deux termes devant l'autre. On définit alors un facteur sans dimension, qui estime l'importance du terme convectif devant le terme de viscosité. On peut estimer l'ordre de grandeur du terme convectif et du terme visqueux

à partir de l'échelle caractéristique  $D$  du problème, de la vitesse moyenne d'écoulement  $v$ , de la masse volumique  $\mu$  du fluide et de sa viscosité  $\eta$ .

$$\left\| \mu \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right\| \approx \mu \frac{v^2}{D} \quad \text{et} \quad \left\| \eta \Delta \vec{v} \right\| \approx \eta \frac{v}{D^2}$$

D'où le nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds

$$\mathcal{Re} = \frac{\text{terme convectif}}{\text{terme visqueux}} = \frac{\mu v D}{\eta}$$

Type d'écoulement	Nombre de Reynolds
Écoulement atmosphérique	$\mathcal{Re} \approx 10^{11}$
Écoulement sanguin dans l'aorte	$\mathcal{Re} \approx 10^4$
Écoulement sanguin dans les capillaires	$\mathcal{Re} \approx 10^{-3}$
Domaine de l'aéronautique	$\mathcal{Re} \approx 10^7$
Domaine de la microfluidique	$\mathcal{Re} \approx 10^{-3} - 1$

Ce nombre joue un rôle très important en mécanique des fluides car il permet de distinguer deux types d'écoulement.

L'écoulement à petit nombre de Reynolds  $\mathcal{Re} \ll 1$  : L'écoulement est laminaire et essentiellement gouverné par la viscosité. Le terme d'inertie est négligeable et l'équation de Navier-Stokes devient

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + \vec{f}_{v,\text{ext}} + \eta \Delta \vec{v}$$

équation qui a le bon goût d'être linéaire. Si l'écoulement est permanent, on obtient le régime de Stokes.

L'écoulement à grand nombre de Reynolds  $\mathcal{Re} \gg 1$  : On montre dans ce cas que les effets visqueux sont concentrés sur les bords, dans une fine couche appelée couche limite, et dans le sillage des obstacles. Hors de ces zones, le terme visqueux est négligeable et l'on retrouve l'équation d'Euler

$$\mu \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \vec{f}_{v,\text{ext}}$$

**Écoulement turbulent**

La viscosité stabilise et régularise les écoulements de façon générale. Ainsi, quand le nombre de Reynolds augmente le régime laminaire devient instable voire turbulent. La transition entre le régime laminaire et turbulent se produit dans une certaine gamme de valeur du nombre de Reynolds qui dépend du problème. On peut retenir qu'en général, lorsque  $\mathcal{R} \gg 10^5$ , l'écoulement devient turbulent, c'est-à-dire que la vitesse en un point  $M$  varie dans le temps de façon erratique. Dans ce cas, le problème étant analytiquement insoluble, on utilise souvent des lois phénoménologiques associées à une analyse dimensionnelle.

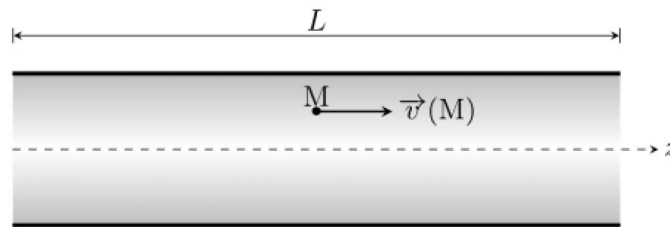
**Exercice :**

Quel est l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds associé à l'écoulement autour d'une balle de tennis allant à la vitesse  $v = 100 \text{ km.h}^{-1}$  dans l'air ?

Le diamètre d'une balle de tennis est de l'ordre de 7 cm, la masse volumique de l'air de l'ordre de  $1 \text{ kg.m}^{-3}$  et sa viscosité de l'ordre de  $2.10^{-5}$  de sorte que

$$\mathcal{R}_e = \frac{\mu v D}{\eta} \simeq \frac{1 \times 100/3,6 \times 0,07}{2.10^{-5}} \simeq 10^5$$

L'écoulement est turbulent.

**8.2.4 Exemple : Loi de Poiseuille**

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide visqueux dans un long tube cylindrique de rayon  $R$  et de longueur  $L \gg R$ . Le tube est horizontal (orienté suivant  $Oz$ ) et l'écoulement est assuré grâce à l'existence d'une différence de pression  $\Delta p$  entre l'entrée du tube et la sortie du tube.

**Hypothèses de travail**

- L'écoulement est permanent donc  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ .
- L'écoulement est incompressible, par conséquent  $\text{div} \vec{v} = 0$ .
- Le nombre de Reynolds est suffisamment petit pour supposer un régime d'écoulement laminaire. En pratique, on considère que c'est le cas, quand  $\mathcal{R} \sim 2000$ .

— L'écoulement est parallèle à Oz et invariant par rotation autour de l'axe Oz, d'où  $\vec{v} = v(r, z)\vec{u}_z$ .

Enfin, on néglige la pesanteur car  $\mu g R \ll \Delta p$ .

### Calcul du champ de vitesse

Commençons par écrire l'équation de continuité :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial(rv_r)}{r\partial r} + \frac{\partial(v_\theta)}{r\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = v(r)\vec{u}_z$$

La vitesse ne dépend pas de  $z$ . Calculons l'accélération :

$$\vec{a}(M, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} v_z(r)\vec{u}_z = \vec{0}$$

L'accélération est nulle. En effet, les lignes de champ sont des droites horizontales et se confondent avec la trajectoire des particules (régime stationnaire). Or si la vitesse ne dépend pas de  $z$  cela signifie que les particules de fluide se déplacent avec une vitesse constante en direction et en intensité. L'accélération est donc nulle. On peut aussi ajouter que chaque particule de fluide est soumise à deux forces qui se compensent : les forces de pression et les forces de viscosité. Sans force de pression, c'est-à-dire sans différence de pression il ne peut pas avoir d'écoulement stationnaire.

L'équation de Navier-Stokes se réduit donc à l'équation de Stokes :  $\vec{\nabla} p = \eta \Delta \vec{v}$ . Projetons cette relation dans la base cylindrique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial p}{r\partial\theta} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dz} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right)$$

Ainsi, la pression ne dépend que de  $z$ . Le terme de gauche de la dernière équation ne dépend donc que de  $z$  alors que celui de droite ne dépend que de  $r$ . Cette équation apparemment paradoxale se résout si les deux termes sont constants.

$$\frac{dp}{dz} = K = -\frac{\Delta p}{L} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right)$$

où  $\Delta p = p_1 - p_2$  est la différence de pression entre l'entrée et la sortie.

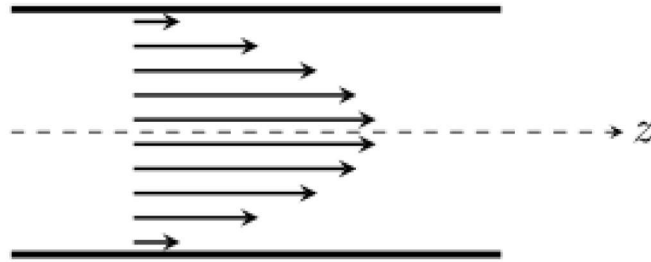
En intégrant deux fois on obtient

$$v(r) = -\frac{\Delta p}{4\eta L} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes d'intégration. La vitesse doit être définie en  $r = 0$  ce qui implique  $C_1 = 0$ . Enfin, les conditions aux limites imposent  $v(R) = 0$  d'où

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

Le profil des vitesses est parabolique.



### Calcul du débit volumique

Le débit volumique est le flux du vecteur vitesse à travers une section de la canalisation :

$$Q_V = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^R v(r) 2\pi r \, dr = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{L}$$

Ainsi, la différence de pression est directement reliée au débit volumique par la formule

Formule de Poiseuille

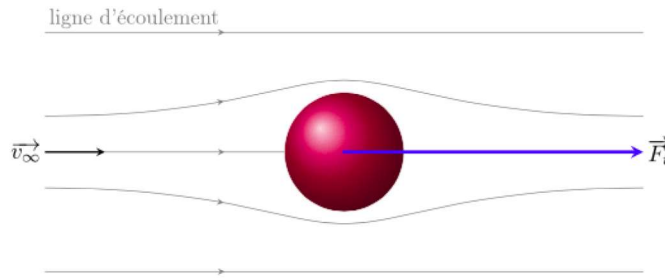
$$\Delta p = \frac{8\eta L}{\pi R^4} Q_V$$

### 8.2.5 Trainée et portance

Si l'on met de côté la poussée d'Archimède, la force que ressent un solide plongé dans un écoulement stationnaire tridimensionnelle est nulle si le fluide n'est pas visqueux. En revanche, l'écoulement visqueux autour d'un obstacle solide produit une force qui présente deux composantes : la composante dans le sens de l'écoulement est appelée force de trainée, la composante perpendiculaire est la force de portance.

### Formule de Stokes

Stokes s'est intéressé à la force de trainée qu'un écoulement visqueux produit autour d'une sphère. Il s'est placé dans le cas où l'écoulement est gouverné par la viscosité c'est-à-dire



pour les petits nombres de Reynolds. La résolution complète est assez longue et nous allons nous contenter de la solution sans chercher à la justifier. Stokes obtient qu'une sphère de rayon  $r$ , immobile, soumise à un écoulement permanent incompressible et visqueux, ressent une force de traînée  $\vec{F}_t$  proportionnelle à la vitesse d'écoulement et à la taille de la sphère

Loi de Stokes :

$$\vec{F}_t = 6\pi\eta r \vec{v}_\infty$$

où  $\vec{v}_\infty$  représente la vitesse de l'écoulement par rapport à la sphère et loin de la sphère.

#### Vitesse de sédimentation

La physique des suspensions (particules solides mélangées à un liquide) et des émulsions (gouttelettes liquides dispersées dans un autre liquide non miscible) utilise la loi de Stokes car le nombre de Reynolds est assez petit. Lorsqu'on laisse reposer un liquide contenant de petites particules solides (comme par exemple un mélange eau-argile), les particules vont décanter c'est-à-dire sédimenter au fond du récipient avec une vitesse qui dépend de leur dimension caractéristique. Le temps de décantation donne alors un renseignement sur la taille des grains. En effet, les grains tombent à une vitesse constante pour laquelle le poids apparent (poids moins la poussée d'Archimède) compense la force de traînée :

$$6\pi\eta r v_{\text{sed}} = \frac{4}{3}\pi r^3 (\mu_s - \mu_l) g$$

d'où

$$v_{\text{sed}} = \frac{2}{9\eta} (\mu_s - \mu_l) r^2$$

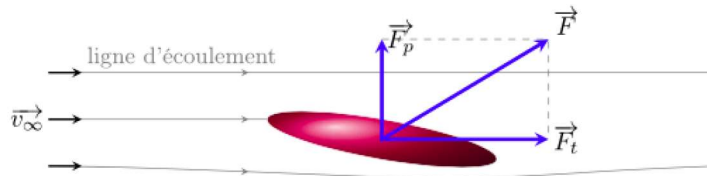
Cette force de traînée est liée d'une part à un champ de pression plus important en avant de la bille et d'autre part aux forces visqueuses.

Si l'on étudie la chute d'une bille sphérique dans un fluide visqueux au repos (loin de la bille), il faut écrire

$$\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$$

où  $\vec{v}$  représente la vitesse de la bille dans le référentiel du laboratoire. Cette loi est vérifiée avec une précision meilleure que 1 % pour  $\mathcal{R} \simeq 0,3$ . Cette contrainte reste cependant assez forte. En effet, pour une bille de 1 cm de diamètre tombant dans l'air cela impose  $v \simeq 0,5 \text{ mm.s}^{-1}$  ce qui signifie que la loi du frottement linéaire n'est pas valable (sauf au tout début) dans ce cas. En revanche, si la chute s'effectue dans un liquide visqueux tel le glycérol (grosso modo mille fois plus dense que l'air et un million de fois plus visqueux), la contrainte devient  $v \simeq 0,5 \text{ m.s}^{-1}$ . Dans ce cas, la loi de Stokes peut être utilisée si la bille n'est pas trop pesante.

### Coefficients aérodynamiques



La force qu'exerce un fluide en écoulement autour d'un obstacle peut se décomposer en deux composantes.

Une composante parallèle à  $\vec{v}_\infty$  : c'est la traînée  $\vec{F}_t$ .

Une composante perpendiculaire : c'est la portance  $\vec{F}_p$ .

Ces deux forces s'expriment comme le prévoit la formule. On définit alors deux coefficients de frottement, le  $C_x$  et le  $C_z$ .

#### Coefficient de traînée

La formule peut se réécrire :

$$F_t = \frac{1}{2} \mu v_\infty^2 S C_x(\mathcal{R}e)$$

où  $S$  représente une surface caractéristique, en générale, la surface frontale projetée. On constate expérimentalement que le  $C_x$  est quasi constant en régime turbulent ( $\mathcal{R}e$  grand) ce qui correspond aux situations courantes de l'aéronautisme, le nautisme, le cyclisme etc. La traînée peut se décomposer en trois termes :

- la traînée visqueuse qui est liée aux frottements du fluide sur l'obstacle
- la traînée de pression qui est liée à l'existence d'une dépression dans le sillage de l'obstacle quand la couche limite se décolle
- la traînée induite par la portance.

La force de traînée que subit un véhicule (en l'air ou au sol) étant opposée à sa vitesse, elle dissipe de l'énergie. La puissance dissipée s'écrit :

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{2}\mu SC_x v^3$$

où  $v$  est la vitesse du véhicule. La puissance dissipée est une fonction cubique de la vitesse, elle ne devient donc importante qu'à haute vitesse grosso modo, en dessous de  $60 \text{ km.h}^{-1}$  pour une voiture, les frottements de roulement l'emportent sur le frottement aérodynamique. Pour minimiser la consommation à grande vitesse, le concepteur aura intérêt à agir sur le produit  $SC_x$ . Le tableau ci-dessous donne quelques exemples.

#### Coefficient de portance

Lorsque que l'obstacle solide présente trois axes équivalents il ne peut pas exister de portance. C'est le cas de la sphère et du cube. Dans le cas contraire, la portance fait intervenir le coefficient de portance  $C_z$  qui dépend de la forme du solide et de l'écoulement :

$$F_p = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2 S C_z(\mathcal{R}e)$$

Par exemple, une aile d'avion présente un coefficient de portance qui dépend

de l'angle d'attaque  $\alpha$ . Lorsque cet angle augmente, la portance augmente jusqu'à un angle  $\alpha_{\max}$  pour lequel la portance est maximum. Une fois cet angle dépassé, la portance s'effondre, c'est le décrochage.

du profil de l'aile, notamment de sa cambrure. Une aile symétrique d'angle d'attaque nul (la corde est parallèle à  $\vec{v}_\infty$ ) ne présente pas de portance. Notez que les hélices d'un hélicoptère sont symétriques : leur portance est liée à leur inclinaison.

Pour un avion en vol, on cherche à avoir une faible traînée (pour consommer moins de carburant) et un maximum de portance c'est-à-dire un rapport  $\frac{C_z}{C_x}$  maximum. Ce rapport, appelé finesse de l'aile, est maximum pour un certain angle.



## Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide



### Bibliographie

- *Mécanique*, Pérez, Masson
- *Hydrodynamique physique*, Guyon, CNRS éditions

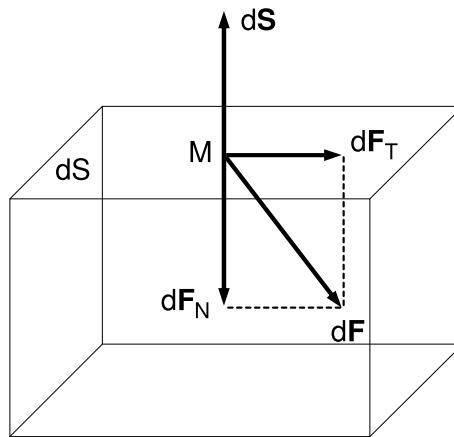
### *Introduction :*

Nous commencerons par définir ce qu'est un écoulement parfait. Dans cette hypothèse, nous appliquerons le principe fondamental de la dynamique à un élément de fluide et nous établirons l'équation d'Euler qui régit localement le mouvement du fluide. Pour un écoulement stationnaire et un écoulement irrotationnel, l'intégration de l'équation d'Euler nous donnera la relation de Bernoulli, traduisant l'aspect énergétique de l'écoulement. En application, nous étudierons l'effet Venturi et donnerons quelques exemples simples de sa manifestation dans diverses situations puis nous traiterons le problème de la vidange d'un réservoir et établirons ainsi la formule de Torricelli.

## 9.1 Ecoulement d'un fluide parfait

### 9.1.1 Forces de contact

Considérons un élément de fluide à l'intérieur d'un fluide quelconque. Les particules microscopiques extérieures à l'élément de fluide, exercent sur celui-ci des forces de contact. Notons  $d\vec{F}$  la force élémentaire qui s'exerce sur la surface  $dS$  de l'élément de fluide. Dans le cas général, cette force possède une composante normale à  $dS$  que l'on notera  $d\vec{F}_N$  et une composante tangentielle  $d\vec{F}_T$ . Ainsi  $d\vec{F} = d\vec{F}_N + d\vec{F}_T$



La composante normale  $d\vec{F}_N$  est la force élémentaire de pression. Si la pression du fluide en  $M$  est  $P(M, t)$ , cette force s'écrit :  $d\vec{F}_N = -P(M, t) \cdot dS$ . Elle est dirigée vers l'intérieur de l'élément de fluide. On peut montrer que le travail total des forces de pression à l'intérieur du fluide est nul. Ces forces ne génèrent donc pas de dissipation d'énergie.

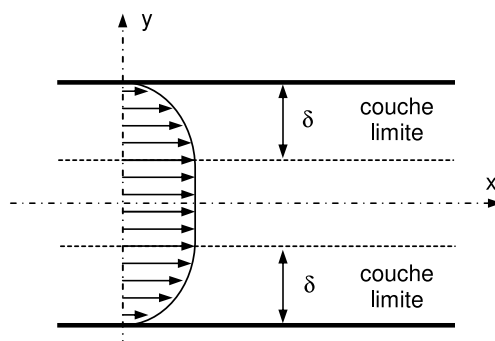
La composante tangentielle  $d\vec{F}_T$  est la force élémentaire de viscosité, également appelée force de cisaillement. Elle est caractéristique des fluides réels visqueux au sens courant du terme. Si les particules microscopiques extérieures à l'élément de fluide ont une vitesse supérieure aux particules microscopiques à l'intérieur de l'élément de fluide, elles vont entraîner les particules microscopiques à l'intérieur de l'élément de fluide dans leur mouvement. Cette force modélise donc un transfert de quantité de mouvement. Dans l'étude de la statique des fluides visqueux, les seules forces de pression suffisent. A l'intérieur du fluide, ces forces de cisaillement s'opposent aux déformations des éléments de fluide. A la surface de l'élément de fluide que nous avons considéré, la force de cisaillement s'oppose au déplacement de cet élément de fluide par rapport au reste du fluide. Par conséquent, le travail des forces de viscosité dans le fluide est négatif. Il y a dissipation de l'énergie. C'est pourquoi ces

forces sont parfois appelées forces de frottement. Il existe également des forces de tension superficielles à l'interface entre deux fluides différents. Proche d'une surface où il n'y a plus d'isotropie de l'espace, les particules sont attirées vers l'intérieur du fluide par les autres particules, ce qui tend ainsi à réduire la surface au minimum. Si l'on veut augmenter une surface  $S$  de  $dS$ , il faut exercer une force qui s'oppose à la force de tension superficielle et dont le travail est  $\delta W = AdS$ , où  $A$  est le coefficient de tension superficielle caractéristique des deux fluides en contact. Dans toute la suite, nous négligerons cette force, même s'il est impératif d'en tenir compte pour les systèmes de petites dimensions.

### 9.1.2 Écoulement parfait ; validité

L'écoulement d'un fluide est parfait si les forces de viscosité sont nulles

Les forces de contact se réduisent aux forces de pression et il n'y a pas de déperdition d'énergie dans le fluide en mouvement. Cette situation est bien sur un cas limite de l'écoulement réel. Au contact d'un solide, même un fluide de très faible viscosité a une vitesse nulle. L'écoulement n'est pas rigoureusement parfait car il existe des forces de frottements entre le fluide et le solide.



Considérons deux plaques parallèles entre lesquelles s'écoule un fluide réel en régime permanent. Loin des parois intérieures, la vitesse du fluide ne dépend pas des variables d'espace. Par contre, proche des parois, cette vitesse diminue et s'annule sur les parois comme l'indique la figure représentant le profil des vitesses. On définit ainsi deux zones :

- La zone centrale où  $\vec{v} = v\vec{e}_x$  avec  $v$  constant. Dans cette zone, le profil des vitesses d'un fluide parfait serait le même que celui du fluide réel considéré.
- La zone périphérique où  $v = v(y)\vec{e}_x$  que l'on appelle la couche limite. L'épaisseur  $\delta$  de cette couche limite est variable et dépend de la vitesse du fluide mais aussi de sa viscosité, de sa masse volumique et des dimensions caractéristiques de la conduite. Dans cette zone, le profil des vitesses d'un fluide parfait serait différent. La vitesse du fluide parfait sur les parois serait non nulle et tangente aux plaques.

L'écoulement d'un fluide peut donc être considéré comme parfait dans la zone centrale, en dehors de la couche limite.

## 9.2 Equation d'Euler et Théorème de Bernoulli

### 9.2.1 Equation d'Euler

Un élément de fluide de volume  $d\tau$  et de masse  $dm$  est soumis à deux types de forces :

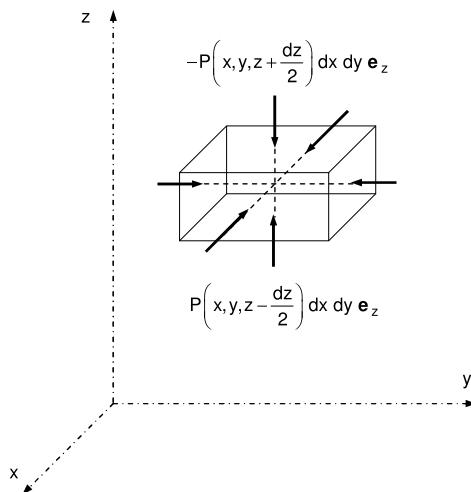
Les forces volumiques qui s'appliquent à toutes les particules de l'élément de fluide :

$$d\vec{F} = \vec{f}_v d\tau$$

où  $\vec{f}_v$  est la représentation volumique de ces forces. En notant  $\mu = dm/d\tau$  la masse volumique du fluide, on peut également écrire :

$$d\vec{F} = \frac{\vec{f}}{\mu} = \vec{f}_m dm$$

avec  $\vec{f}_m$  la représentation massique de ces forces. Ainsi, pour les forces de pesanteur ;  $\vec{f}_v = \mu\vec{g}$  et  $\vec{f}_m = \vec{g}$ .



Les forces de contact qui se réduisent aux forces de pression dans le cas d'un écoulement parfait. Déterminons la résultante  $d\vec{F}_P$  des forces qui s'exercent sur un élément de fluide parallélépipédique de côté  $dx, dy, dz$ .

La composante de  $d\vec{F}_P$  suivant l'axe  $Oz$ , s'écrit :

$$dF_{pz} = P(x, y, z - \frac{dz}{2})dxdy - P(x, y, z + \frac{dz}{2})dxdy = -\frac{\partial P}{\partial z}dxdydz$$

De même, suivant les directions  $Ox$  et  $Oy$  :

$$dF_{Px} = -\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz$$

$$dF_{Py} = -\frac{\partial P}{\partial y}dxdydz$$

Finalement :

$$d\vec{F}_P = -\overrightarrow{\text{grad}}P d\tau$$

Les équivalents volumiques et massiques des forces de pression sont :

$$\vec{f}_{Pv} = -\overrightarrow{\text{grad}}P$$

$$\vec{f}_{Pm} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}}P}{\mu}$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique, ou théorème de la résultante cinétique, à l'élément de fluide de volume  $d\tau$  et de masse  $dm$ . On obtient l'équation d'Euler :

$$dm \frac{D\vec{v}}{Dt} = d\vec{F} + d\vec{F}_P$$

où  $D\vec{v}/Dt$  est la dérivée particulière de la vitesse de l'élément de fluide, avec :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\frac{v^2}{2} + \overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} \wedge \vec{v}$$

L'équation d'Euler s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{\text{grad}} P}{\mu}$$

ou encore :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{\text{grad}} P}{\mu}$$

Les grandeurs inconnues sont la vitesse  $\vec{v}(M, t)$ , la pression  $P(M, t)$  et la masse volumique  $\mu(M, t)$ , soit cinq inconnues scalaires. La résolution du problème nécessite donc cinq équations scalaires. Trois de ces relations scalaires sont données par l'équation vectorielle d'Euler, une par la relation traduisant la conservation de la masse et la dernière par une équation d'état. Mais l'équation d'état introduit une grandeur inconnue supplémentaire ; la température  $T(M, t)$ . Une sixième relation scalaire est donc nécessaire. Elle est donnée par la loi de l'écoulement thermodynamique, par exemple isotherme, incompressible ou encore adiabatique.

### 9.2.2 Relations de Bernoulli

Dans de nombreux cas, les forces massiques  $\vec{f}_m$  dérivent d'une énergie potentielle massique  $e_{pm}$ , et donc  $\vec{f}_m = -\overrightarrow{\text{grad}} e_{pm}$ . Pour les forces de pesanteur,  $e_{pm} = gz$ .

#### Écoulement stationnaire

Lorsque l'écoulement est stationnaire :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

Multiplions scalairement l'équation d'Euler par le déplacement élémentaire  $d\overrightarrow{OM} = \vec{v} dt$  le long d'une ligne de courant afin de faire disparaître le terme  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}$  dans la deuxième expression de cette équation. Il vient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} + e_{pm} \right) \cdot d\overrightarrow{OM} + \frac{\overrightarrow{\text{grad}} P \cdot d\overrightarrow{OM}}{\mu} = \vec{0}$$

et

$$d\left(\frac{v^2}{2} + e_{pm} - \frac{dP}{\mu}\right) = 0$$

Après intégration, le long d'une ligne de courant, on obtient la relation de Bernoulli :

$$\frac{v^2}{2} + e_{pm} + \int \frac{dP}{\mu} = \text{constante}$$

Faisons deux hypothèses sur le fluide :

- Le fluide est barotrope :  $\mu = \mu(P)$ . Dans ce cas, la primitive de  $dP/\mu(P)$  ne dépend que de  $P$ . On la note  $\varphi(P)$ . La relation de Bernoulli, valable le long d'une ligne de courant s'écrit :

$$\frac{v^2}{2} + e_{pm} + \varphi(P) = \text{constante}$$

- Le fluide est incompressible et homogène :  $\varphi = \text{cte}$  et  $\varphi = P/\mu$ . Toujours le long d'une ligne de courant, la relation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{v^2}{2} + e_{pm} + \frac{P}{\mu} = \text{constante}$$

Rq : Si l'on note  $H$  l'enthalpie du fluide,  $U$  son énergie interne,  $P$  sa pression,  $V$  son volume et  $m$  sa masse :

$$dH = VdP + TdS$$

La variation infinitésimale d'enthalpie massique  $h$  est :

$$dh = \frac{V}{m}dP + \frac{TdS}{m}$$

Et donc pour un écoulement isentropique :  $dh = \frac{dP}{\mu}$

La relation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{v^2}{2} + e_{pm} + h = \text{constante}$$

**Écoulement irrotationnel**

Dans un écoulement irrotationnel,  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} = \vec{0}$ . Il existe alors une fonction scalaire  $\phi$  telle que  $v = \overrightarrow{\text{grad}}\phi$ . L'équation d'Euler s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + e_{pm} \right) + \frac{\overrightarrow{\text{grad}}P}{\mu} = 0$$

Reprenons les deux hypothèses du paragraphe précédent :

Le fluide est barotrope :  $\mu = \mu(P)$  et  $\varphi(P) = \int_{P_0}^P \frac{du}{\mu(u)}$ . Puisque  $\varphi$  ne dépend que de la pression  $P$  :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial P} \overrightarrow{\text{grad}}P = \frac{\overrightarrow{\text{grad}}P}{\mu(P)}$$

L'équation d'Euler prend la forme suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + e_{pm} + \varphi(P) \right) = 0$$

Par intégration, on obtient la relation de Bernoulli valable dans tout le fluide :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + e_{pm} + \varphi(P) = \text{constante}(t)$$

Le fluide est incompressible et homogène :  $\mu = \text{cte}$  et  $\varphi = P/\mu$ . la relation de Bernoulli valable dans tout le fluide, s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + e_{pm} + \frac{P}{\mu} = \text{constante}(t)$$

Dans les deux cas, si l'écoulement est en plus stationnaire :  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ .

**Interprétation**

Nous venons de voir que dans le cas le plus simple, c'est à dire pour un écoulement stationnaire et irrotationnel d'un fluide incompressible homogène, la relation de Bernoulli, valable dans tout le fluide, s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + e_{pm} + \frac{P}{\mu} = \text{constante}$$

Cette relation traduit la conservation de l'énergie mécanique dans un écoulement parfait.

- $\frac{v^2}{2}$  est l'énergie cinétique massique du fluide.
- $\frac{P}{\mu}$  est l'énergie potentielle massique associée aux forces massiques de pression  $\vec{f}_{Pm} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P/\mu)$ .
- $e_{pm}$  est l'énergie potentielle massique associée aux autres forces que les forces de pression  $\vec{f}_m = -\overrightarrow{\text{grad}}e_{pm}$ .

La relation de Bernoulli s'écrit également :

$$\mu \frac{v^2}{2} + \mu e_{pm} + P = \text{constante}$$

- $\mu \frac{v^2}{2}$  homogène à une pression s'appelle la pression dynamique.
- $\mu e_{pm} + P$  est la pression statique.

La somme de ces deux pressions est la pression totale. La relation de Bernoulli exprime le fait que cette pression soit constante.

### 9.3 Applications

La relation de Bernoulli, la plus simple, s'applique dans le cadre très contraignant d'un écoulement stationnaire, irrotationnel et incompressible. Voyons dans quelle mesure nous pouvons l'appliquer à un fluide faiblement compressible, tel que  $\Delta\mu \ll \mu$ . Le coefficient de compressibilité isentropique du fluide s'écrit :

$$\chi = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial P} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta\mu}{\Delta P}$$

De  $\Delta\mu \ll \mu$ , on déduit  $\chi\Delta P \ll 1$ . Appliquons la relation de Bernoulli  $\frac{v^2}{2} + e_{pm} + \frac{P}{\mu} = cte$  entre deux points du fluide ; le premier où la vitesse est minimum et la pression maximum et le deuxième où la vitesse est maximum et la pression minimum. On suppose que l'énergie potentielle massique  $e_{pm}$  ne varie pas entre ces deux points. On obtient :

$$\Delta \left( \frac{v^2}{2} \right) = \frac{\Delta P}{\mu} \quad \text{avec} \quad \Delta \left( \frac{v^2}{2} \right) = \frac{v_{max}^2}{2} - \frac{v_{min}^2}{2} \quad \text{et} \quad \Delta P = P_{max} - P_{min}$$

Puisque  $\chi\Delta P \ll 1$ , on a :

$$\chi\mu\Delta\left(\frac{v^2}{2}\right) \ll 1$$

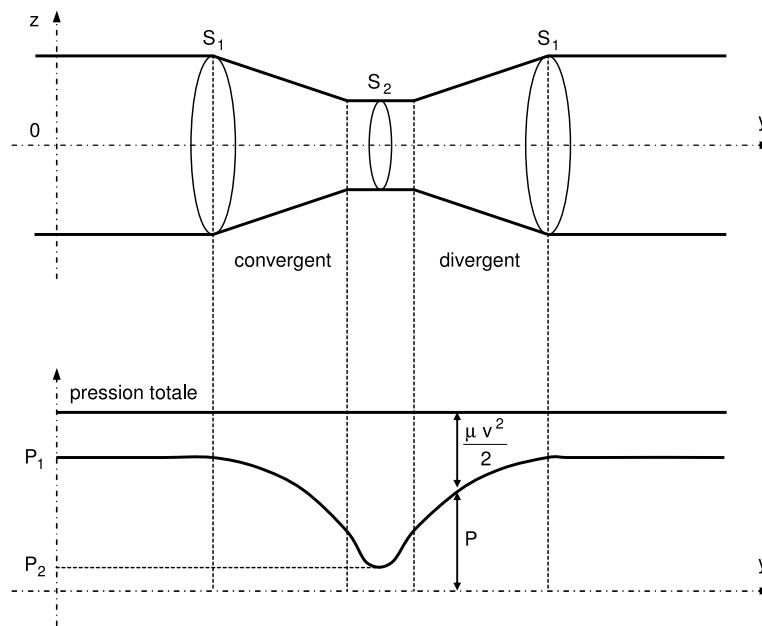
Or, la vitesse des ondes acoustiques dans les fluides est  $c = \frac{1}{\sqrt{\chi\mu}}$ . En supposant que  $v_{min} = 0$ , on déduit la condition :

$$v_{max} \ll c$$

Nous pourrions donc appliquer la relation de Bernoulli relative à un écoulement stationnaire et irrotationnel, à un fluide compressible, tant que sa vitesse est très inférieure à celle du son dans ce fluide.

### 9.3.1 Effet Venturi

#### Principe de l'effet Venturi



Considérons un fluide homogène et incompressible en écoulement stationnaire et irrotationnel dans un tube de Venturi, c'est à dire dans une conduite dont la section diminue (convergent) puis augmente (divergent). Cette conduite à une symétrie de révolution autour de l'axe  $Oy$  et nous supposons que la vitesse du fluide est uniforme dans une section droite de la conduite. Dans ces conditions, la conservation du débit volumique le long d'un tube de courant s'écrit entre les sections  $S_1$  et  $S_2$  :

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

En appliquant la relation de Bernoulli entre  $S_1$  et  $S_2$ , avec  $e_{pm} = gz$ , on a :

$$\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{P_1}{\mu} = \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{P_2}{\mu}$$

Mais le long de l'axe  $Oy$ ,  $z_1 = z_2$

D'où :

$$P_2 = P_1 + \frac{\mu v_1^2}{2} \left( 1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} \right)$$

et

$$P_2 = P_1 + \frac{\mu v_1^2}{2} \left( 1 - \frac{S_1^2}{S_2^2} \right)$$

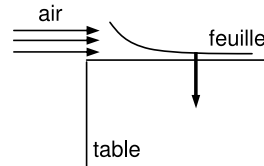
Comme  $S_1 > S_2$ ,  $P_1 > P_2$  et  $v_1 < v_2$ . Dans les régions de faible section, le fluide s'écoule plus vite et sa pression est plus faible que dans les régions de grande section : c'est l'effet Venturi.

La figure montre l'évolution de la pression statique, réduite à  $P$  pour  $z = 0$ , et de la pression dynamique  $\frac{\mu v^2}{2}$ .

## Expériences

### Feuilles de papier

Prenons une feuille de papier format A4 en la tenant par ses extrémités et soufflons horizontalement au-dessus de cette feuille. La vitesse de l'air étant plus rapide au-dessus de la feuille qu'en dessous, il se crée une dépression qui soulève la feuille.

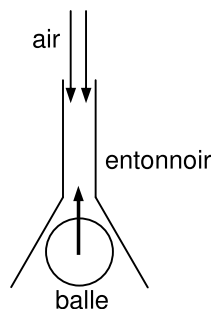


Le même phénomène se produit sur les ailes d'avion. Ces ailes étant inclinées, l'air qui y circule au-dessus va plus vite que l'air qui passe en dessous. Il y a donc une dépression au-dessus des ailes et une surpression en dessous. Ces deux effets indissociables s'additionnent pour maintenir l'avion en l'air.

Les voitures de course utilisent cet effet pour rester plaquer au sol. L'air qui passe sous la voiture traverse une faible section. Sa vitesse  $y$  est plus grande qu'au-dessus de la voiture et la pression plus faible. C'est l'effet de sol.

### Balle de ping-pong

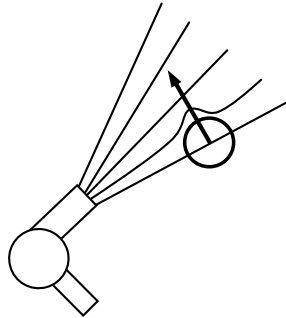
Soufflons dans un entonnoir et plaçons une balle de ping-pong sous cet entonnoir comme l'indique la figure. Entre l'entonnoir et la balle, la vitesse de l'air est importante car la section est faible. Il se crée une dépression qui aspire la balle dans l'entonnoir.



En utilisant un sèche-cheveux, il est possible de maintenir en l'air, une balle de ping-pong. Le sèche-cheveux crée un déplacement d'air plus important d'un côté de la balle que de l'autre, et donc une pression plus faible du côté de l'air en mouvement. La balle est en équilibre sous l'action de trois forces : son poids, la force de pression de l'air et la force due à la dépression.

Autres exemples :

- La trompe à eau
- Le pulvérisateur.

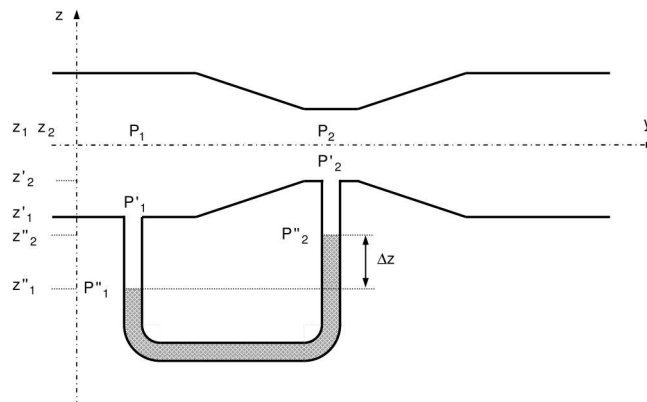


### Mesure d'un débit avec un tube de Venturi

La vitesse du fluide à travers la section  $S_1$  du tube de Venturi est :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\mu \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}}$$

Pour obtenir cette vitesse et le débit volumique du fluide  $D_v = S_1 v_1$  il suffit de déterminer la variation de pression  $P_1 - P_2$ . Utilisons un tube en U rempli d'un fluide de masse volumique  $\mu_0$ , disposé comme l'indique la figure.



Dans le tube en U, le fluide est en équilibre statique. Il n'y a pas de pression dynamique. La relation de Bernoulli donne :

$$P''_1 - P''_2 = \mu g(z'_1 - z''_1)$$

et

$$P''_2 - P'_2 = \mu g(z'_2 - z''_2)$$

Par soustraction il vient :

$$P''_1 - P''_2 - (P'_1 - P'_2) = \mu g [z'_1 - z'_2 - (z''_1 - z''_2)]$$

Or, dans le tube en  $U$  on peut aussi écrire :

$$P''_1 - P''_2 = \mu_0 g(z''_2 - z''_1) = \mu_0 g \Delta z$$

En reportant cette relation dans la précédente on obtient une première expression de  $P'_1 - P'_2$  :

$$P'_1 - P'_2 = (\mu_0 - \mu)g \Delta z - \mu g(z'_1 - z'_2)$$

Dans le tube de Venturi, appliquons la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant. Sur l'axe, puisque  $z_1 = z_2 = 0$  :

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\mu} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\mu}$$

Au bord du tube :

$$\frac{v_1'^2}{2} g z'_1 + \frac{P'_1}{\mu} = \frac{v_2'^2}{2} g z'_2 + \frac{P'_2}{\mu}$$

En supposant que  $v_1 = v_1'$  et  $v_2 = v_2'$ , la soustraction des deux dernières équations permet d'éliminer  $v_1$  et  $v_2$  et on obtient une deuxième expression de  $P'_1 - P'_2$  :

$$P'_1 - P'_2 = P_1 - P_2 - \mu g(z'_1 - z'_2)$$

En combinant les deux expressions on déduit :

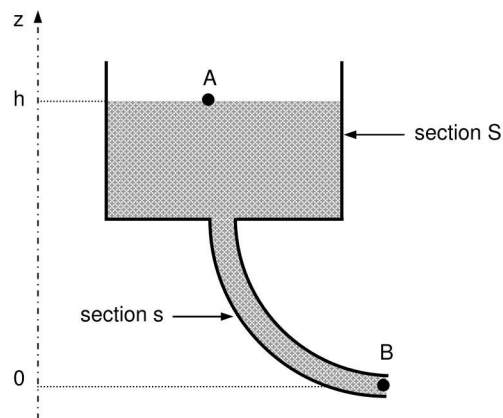
$$P_1 - P_2 = (\mu_0 - \mu)g \Delta z$$

Et le débit volumique :

$$D_v = S_1 v_1 = \frac{S_1 S_2}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{\frac{2(\mu_0 - \mu)}{\mu}} g \Delta z$$

### 9.3.2 Vidange d'un réservoir ; formule de Torricelli

Considérons un réservoir de section  $S$ , contenant un fluide homogène et incompressible. Un tube de vidange de longueur  $L$  et de section  $s \ll S$ , raccordé sur le fond du réservoir, permet d'évacuer le fluide.



Dans ce problème, nous cherchons à déterminer la vitesse d'éjection du fluide  $v_B$  au point  $B$ .

#### Écoulement laminaire

Supposons dans un premier temps que l'écoulement soit parfaitement stationnaire. Entre les points  $A$  et  $B$  d'une ligne de courant, la relation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{v_A^2}{2} + gz_A + \frac{P_A}{\mu} = \frac{v_B^2}{2} + gz_B + \frac{P_B}{\mu}$$

Mais lorsque le fluide s'écoule,  $P_A = P_B$  et  $v_B \gg v_A$  car  $S \gg s$  et  $v_A = v_B$ . Nous obtenons ainsi la formule de Torricelli :

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

**Écoulement en régime non stationnaire**

A l'instant initial  $t = 0$ , le fluide commence de s'écouler au point  $B$ . On cherche ici à déterminer l'évolution de la vitesse d'éjection du fluide au cours du temps. Repartons de l'équation d'Euler, avec

$$\vec{f}_m = -\overrightarrow{\text{grad}}gz :$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\mu} \right) + \overrightarrow{\text{rot}} \wedge \vec{v} = 0$$

Projetons cette équation sur le vecteur déplacement élémentaire  $d\overrightarrow{OM} = \vec{v}dt$  et intégrons le long d'une ligne de courant entre les points  $A$  et  $B$ . On obtient :

$$\int_A^B \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\mu} \right) \cdot d\overrightarrow{OM} \right] = 0$$

En tenant compte du fait que  $P_A = P_B$  et  $v_B \gg v_A$  car  $S \gg s$  et  $v_A S = v_B s$ , la relation de Bernoulli s'écrit :

$$\int_A^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\overrightarrow{OM} + \frac{v_B^2}{\mu} - gh = 0$$

De plus, avec les hypothèses précédentes, nous pouvons considérer que l'accélération du fluide dans le réservoir est négligeable par rapport à son accélération dans le tube de vidange et que le module de la vitesse du fluide est uniforme dans tout le tube de vidange. En notant  $v$ , la vitesse du fluide dans le tube et en particulier au point  $B$  :

$$L \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2} - gh = 0$$

La vitesse  $v$  tend vers une limite  $v_\infty = \sqrt{2gh}$  donnée par la stationnaire. Avec cette notation :

$$\frac{dv}{v_\infty^2 - v^2} = \frac{dt}{2L}$$

En remarquant que :

$$\frac{2dv}{v_\infty^2 - v^2} = \frac{1}{v_\infty} \left( \frac{dv}{v_\infty - v} + \frac{dv}{v_\infty + v} \right)$$

l'intégration de l'équation différentielle conduit, avec la condition initiale  $v(t = 0) = 0$  à :

$$v_B = v = v_\infty \tanh\left(\frac{t}{T}\right)$$

avec  $T = \frac{2L}{v_\infty}$

### 9.3.3 Autres applications

- Le tube de Pitot simple et double.
- Le tube de Prandtl.

*Conclusion :*

L'écoulement parfait d'un fluide est décrit par l'équation locale d'Euler qui relie le champ vectoriel des vitesses, les champs scalaires des pressions et des masses volumiques. La relation de Bernoulli est la traduction énergétique de l'équation d'Euler. Pour un écoulement stationnaire, elle s'applique le long d'une ligne de courant et pour un écoulement irrotationnel, dans tout le fluide. Cette relation a été établie dans le cas d'un fluide barotrope et d'un fluide incompressible homogène, mais son expression la plus simple obtenue pour un écoulement stationnaire et irrotationnel d'un fluide incompressible homogène peut être appliquée à un fluide compressible dans la mesure où sa vitesse d'écoulement est très inférieure à la vitesse du son dans ce fluide. Ceci permet d'expliquer de nombreuses situations où le fluide considéré est l'air.