TD 1 : Modèle de l'oscillateur harmonique

I. Tester ses connaissances et sa compréhension du cours

1) Rappeler la loi de Hooke et retrouver l'unité SI de la constante de raideur grâce à une équation aux dimensions.

2) Établir l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique sur l'exemple du système masse-ressort vertical.

3) Rappeler l'expression de la solution complète d'une telle équation différentielle.

4) Vérifier que $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\phi)$ est bien solution de $\ddot{x}(t)+\alpha^2 x(t)=0$ où l'on précisera l'expression de α.

5) Quelles sont les relations entre pulsation propre, fréquence propre et période propre d'un oscillateur harmonique.

6) Qu'est-ce que l'isochronisme des oscillations ?

7) Lorsque l'on accroche une masse de 100 g à un ressort accroché au plafond, le ressort s'étire de 10 cm.
Calculer la raideur k du ressort.

8) Après avoir rappelé les énergies cinétique et potentielle du système masse-ressort horizontal, montrer que l'énergie mécanique d'untel système est constante.

II. Questions de réflexion – Physique pratique

1) Bus et dos d'âne

Un bus vide de masse m = 5 tonnes passe au-dessus d'un dos d'âne. Il oscille alors verticalement à la fréquence f = 1 Hz.
Au retour, le bus est rempli de passagers et sa masse est deux fois plus élevée.
Quelle est la fréquence des oscillations après le dos d'âne ?

2) Autre équation différentielle

Soit l'équation différentielle $\ddot{x}-\omega_0^2 x=0$, où ω_0 est une constante.

a. La fonction $x(t)=A\sin(\omega_0 t)$ est-elle solution de cette équation différentielle ?

b. En réfléchissant au type de force mise en jeu dans une telle équation différentielle, pouvait-on s'attendre au résultat précédent ?

III. Exercices d'entraînement

1) Reconnaître un oscillateur harmonique

La tension électrique $v(t)$ aux bornes d'un oscillateur à quartz (tel qu'on en trouve dans les montres) vérifie l'EDL_2 :

$$\frac{d^2 v}{dt^2}+A\,v(t)=0 \text{ avec } A = 4{,}239.10^{10} \text{ SI}$$

Quelle est la dimension de A ? Quelle est la fréquence propre de cet oscillateur ?

2) Mesure à l'accéléromètre

On considère un système masse-ressort horizontal constituant un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 où l'élongation du ressort sera noté $x(t)$. On allonge initialement le ressort de $x(t=0)$ =10,0 cm et on le lâche sans vitesse initiale. Un accéléromètre fixé à la masse m permet de mesurer une accélération initiale $a(t=0)$ =-42,0 m.s^{-2}

Déterminer l'amplitude des oscillations ainsi que la pulsation propre du système.

3) Mouvement sinusoïdal d'un corps

Un corps oscille d'un mouvement sinusoïdal d'équation $x(t)=15{,}0\cos(100.\pi.t-\frac{\pi}{2})$ où chaque quantité est exprimée en unités SI.

1. Déterminer l'amplitude A, la fréquence propre f_0, la phase à l'origine des temps φ et la période propre T_0 du mouvement.

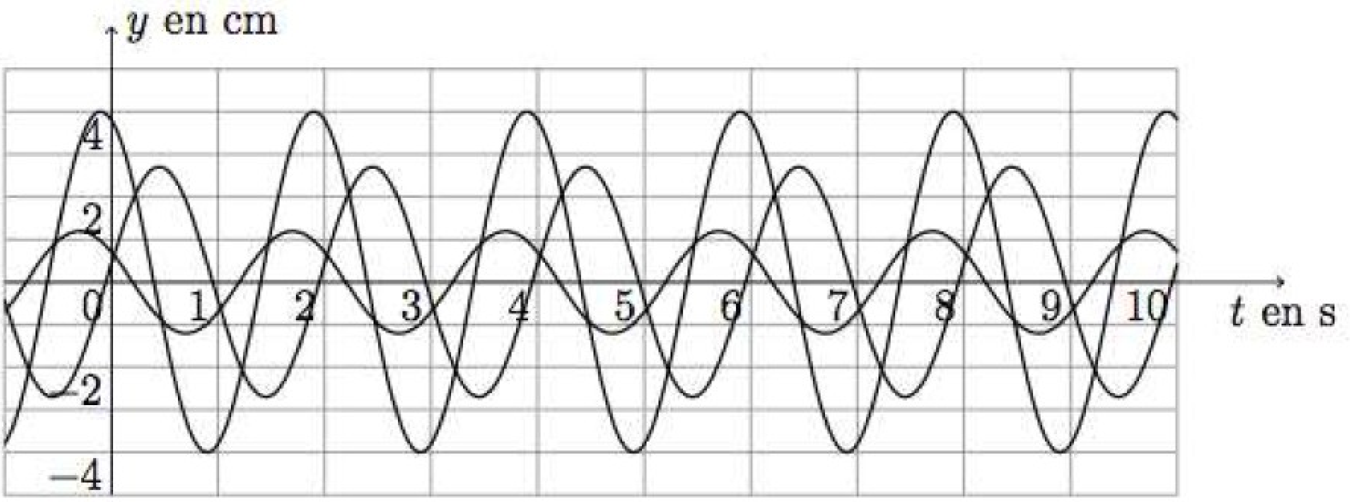
2. Quelle est son accélération, sa vitesse et son élongation à l'instant $t_1 = T_0/4$

3. Tracer les variations de la position $x(t)$ au cours du temps en indiquant les points remarquables.

4) Influence des conditions initiales sur le mouvement d'un oscillateur harmonique

La figure ci-dessous indique les graphes $y(t)$ correspondant à diverses conditions initiales d'un oscillateur harmonique.

On note $y_1(t)$ la fonction de plus faible amplitude, $y_2(t)$ celle d'amplitude moyenne et enfin $y_3(t)$ celle d'amplitude la plus élevée.



1. Précisez dans un tableau pour $k = 1, 2, 3$ les valeurs des amplitudes y_{km} des positions initiales $y_k(t = 0)$, des périodes T_k ainsi que le signe de la composante de la vitesse initiale $\dot{y}_k(t=0)$

2. En quoi les courbes expérimentales fournies sont-elles en accord avec l'équation différentielle :

$$\ddot{y}+\omega_0^2 y=0$$

3. Établir une relation générale liant l'amplitude de la fonction $y(t)$ et l'amplitude de la vitesse $v_y(t)$.

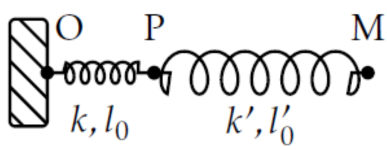
5) Association série/parallèle de ressorts

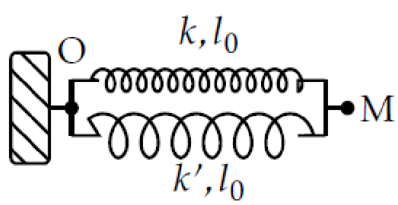
1. On considère deux ressorts de constantes de raideur respectives k et k' et de longueurs à vide respectives l_0 et l_0' associés en série comme représenté ci-dessous.

Montrer qu'ils sont équivalents à un unique ressort idéal dont on donnera la constante de raideur.

2. On considère maintenant deux ressorts de constantes de raideur respectives k et k' et de même longueur à vide l_0 associés en parallèle comme représenté ci-dessous : leurs extrémités sont toujours jointes.

Montrer qu'ils sont équivalents à un unique ressort idéal dont on donnera la constante de raideur.





6) Système masse-ressort vertical (*)

Un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k est fixé en O au plafond.

À son autre extrémité est attaché un mobile M de masse m, repéré par la coordonnée z telle que la position du mobile soit $\overrightarrow{OM} = z\,\overrightarrow{e_z}$ en repérage cartésien.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement de la masse.

2. Quelle est la position d'équilibre $z_{éq}$? Commenter le résultat obtenu.

3. On pose $X(t) = z(t) - z_{éq}$. Trouver l'équation différentielle satisfaite par $X(t)$.

4. Quelle est la période des oscillations ? Commenter.

On cherche à retrouver l'équation du mouvement par une méthode énergétique.

La position de la masse est à nouveau donnée par une fonction pour le moment indéterminée $z(t)$.

5. Évaluer l'énergie potentielle élastique et l'énergie potentielle de pesanteur en fonction notamment de $z(t)$ et $\dot{z}(t)$

6. Écrire la relation traduisant la conservation de l'énergie mécanique E_m.

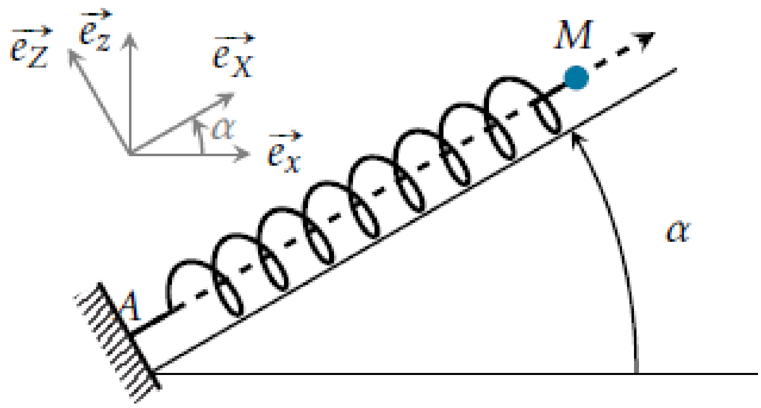
En déduire l'équation différentielle du mouvement en dérivant cette relation par rapport au temps.

7) Système masse-ressort sur plan incliné (*)

On place un système masse-ressort sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.

Le vecteur vitesse initial est ici nul et le ressort est initialement allongé d'une longueur X_0.

Déterminer le mouvement ultérieur en utilisant les coordonnées X et Z d'origine A et de vecteurs de base $\overrightarrow{e_X}$ et $\overrightarrow{e_Z}$.



8) Elasticité d'une fibre de verre (*)

Le verre est un matériau très dur. On peut toutefois le déformer légèrement sans le casser : on parle d'élasticité.

Récemment, des expériences de biophysique ont été menées pour étudier l'ADN.

Le capteur utilisé était simplement une fibre optique en silice amincie à l'extrémité de laquelle on accroche un brin d'ADN.

L'expérience consistait à suivre la déformation de flexion de la fibre.

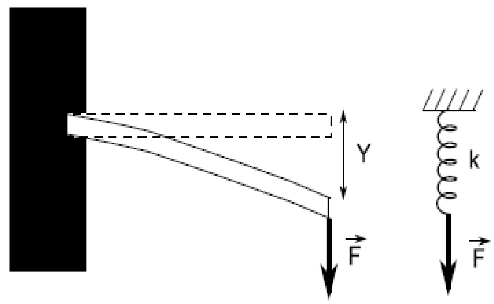
La masse volumique du verre est ρ = 2500 kg.m^{-3}

La fibre de verre de longueur l et de diamètre d est encastrée horizontalement dans une paroi immobile.

Au repos, la fibre est horizontale (on néglige son poids).

Quand on applique une force verticale F (on supposera que la force F reste verticale tout au long de l'expérience) à l'extrémité libre de la fibre, celle-ci est déformée.

L'extrémité est déplacée verticalement d'une distance Y que l'on appelle la flèche (voir figure).



La flèche Y est donnée par la relation suivante (on notera la présence du facteur numérique 7, sans dimension, qui est en fait une valeur approchée pour plus de simplicité) : $Y = \frac{7 l^3 F}{E d^4}$ où E est appelé module d'Young du verre.

Pour les applications numériques on prendra pour le module d'Young E = 7.10^{10} SI.

1. Par une équations aux dimensions, déterminer l'unité S.I. du module d'Young E.

2. En considérant uniquement la force F, montrer que l'on peut modéliser la fibre de verre par un ressort de longueur à vide nulle et de constante de raideur k dont on donnera l'expression analytique en fonction de E, d et l.

3. Calculer numériquement k pour une fibre de longueur l = 7 mm et de diamètre d =10 µm.

<u>On a tous fait l'expérience suivante</u> : faire vibrer une règle ou une tige lorsqu'une de ses extrémités est bloquée.

On cherche ici à trouver les grandeurs pertinentes qui fixent la fréquence des vibrations.

L'extrémité de la tige vaut $Y(t)$ à l'instant t. On admet que lors des vibrations de la fibre, l'énergie cinétique de la fibre de verre est donnée par l'expression : $E_c = \rho l d^2 \left(\frac{dY}{dt}\right)^2$

4. En utilisant l'analogie avec le ressort, exprimer l'énergie potentielle élastique de la fibre de verre, lorsque la flèche vaut Y, en fonction de E, d et l.

5. Écrire l'expression de l'énergie mécanique de la fibre en négligeant l'énergie potentielle de pesanteur.

6. Écrire la relation traduisant la conservation de l'énergie mécanique E_m.

En déduire l'équation différentielle qui régit les vibrations de la fibre en dérivant cette relation par rapport au temps.

7. Quelle est l'expression de la fréquence propre de vibration d'une tige de verre de module d'Young E, de longueur l et de diamètre d ?

8. Calculer numériquement la fréquence des vibrations d'une fibre de verre de longueur 7 mm et de diamètre 0,01 mm.

IV. Résolution de problèmes

Problème 1

La figure ci-dessous représente l'astronaute Tamara Jernigan en train d'utiliser un BMMD (*Body Mass Measurement Device)* au cours d'une mission en orbite autour de la Terre.

Il s'agit essentiellement d'un siège pouvant se translater vers l'avant ou vers l'arrière et lié au bâti par des ressorts.

Quel est l'intérêt d'un tel dispositif ?

Problème 2

On considère deux ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide l_0.

Le premier ressort est attaché au plafond en O et on lui suspend une masse m.

Le second ressort pend sous la masse et on note A l'extrémité du ressort du bas.

Une personne saisit l'extrémité A et tire vers le bas soit lentement ou soit rapidement.

L'un des deux ressorts finit par se rompre. Lequel ?

Problème 3 (*)

Un ours polaire (Ursus maritimus) est assis sur une plaque de banquise d'une surface d'environ 30 m^2

La glace émerge alors de 10 cm.

L'ours plonge dans l'océan. La plaque de banquise oscille alors à une période de 2,1 s.

Estimer la masse de l'ours.