Feuille d'exercices :
Fonction exponentielle

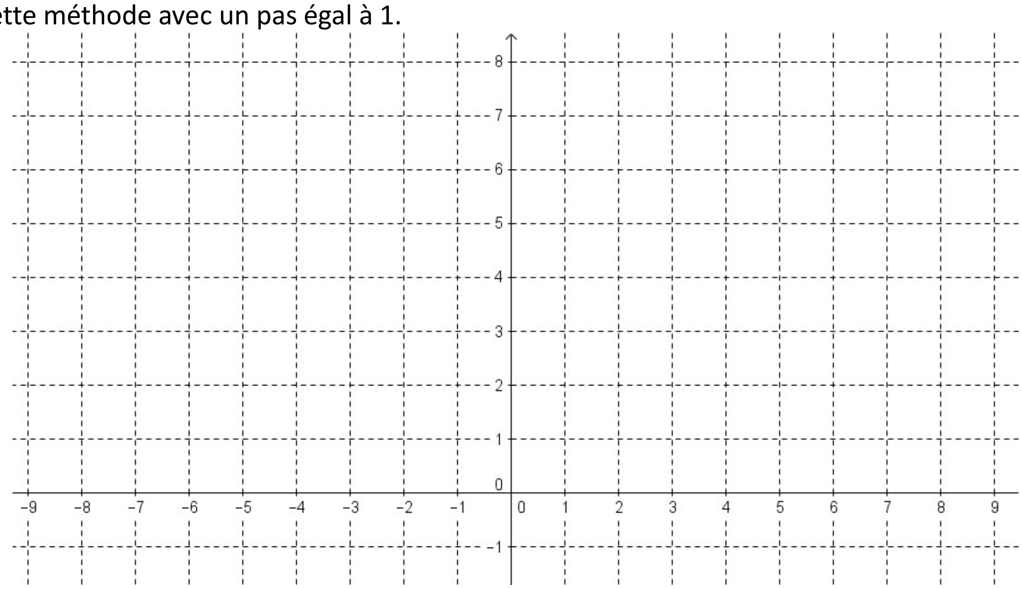
Construction de la courbe par la méthode d'Euler

Exercice 1 :

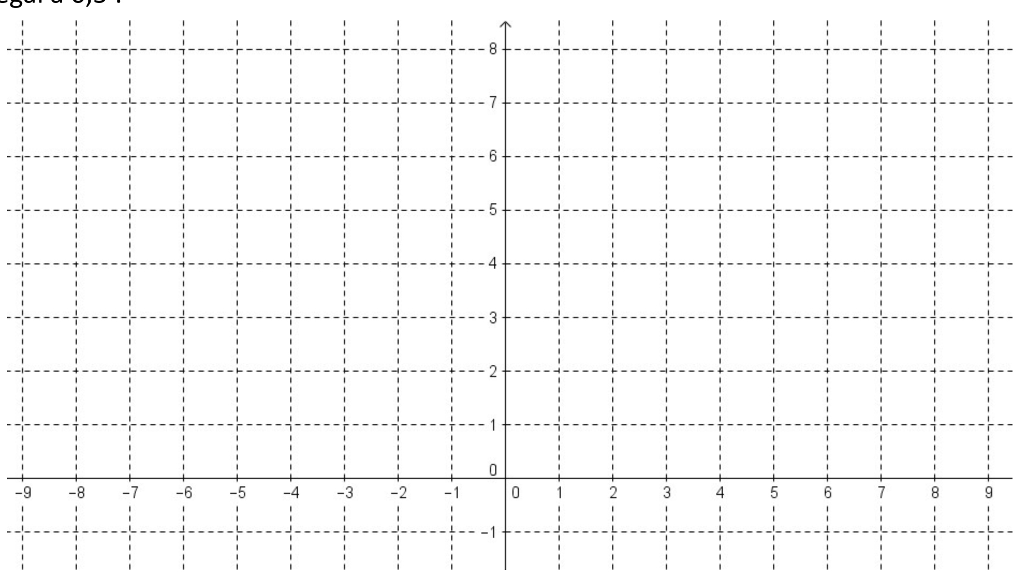
En partant des deux propriétés qui définissent la fonction exponentielle, c'est à dire : $f' = f$ et $f(0) = 1$
Tracer, à l'aide de la méthode d'Euler une approximation de la courbe de la fonction exponentielle.

Principe de la « méthode d'Euler » :
Nous allons décider de tracer la courbe en partant du principe qu'elle peut être approchées par ses tangentes. On va donc construire une tangente au seul point connu de la courbe $(0\,;1)$ *et tracer la tangente en ce point à l'aide du coefficient directeur puisque nous savons que* $f'(0) = f(0) = 1$.
Nous allons ensuite choisir un « pas », c'est à dire l'amplitude des intervalles sur lesquels on assimilera la courbe à ses tangentes avant de se fixer un point et de recommencer l'opération.

Appliquer cette méthode avec un pas égal à 1.

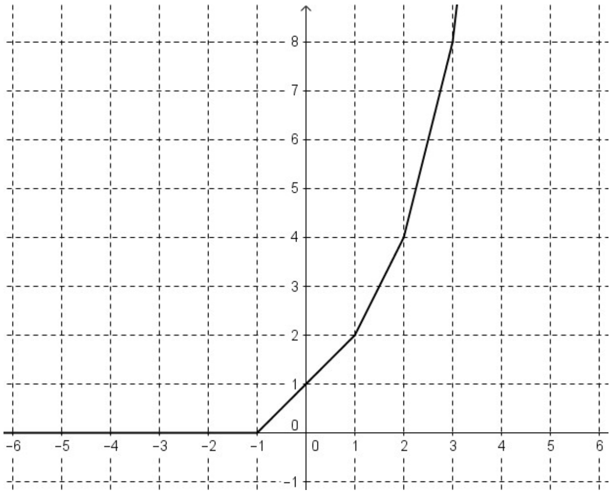


Avec un pas égal à 0,5 :

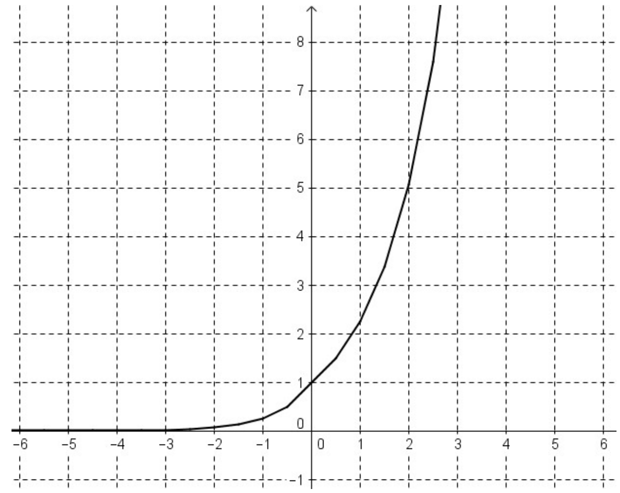


Voila quelque graphiques effectués avec un pas qui se rapproche de plus en plus de 0.

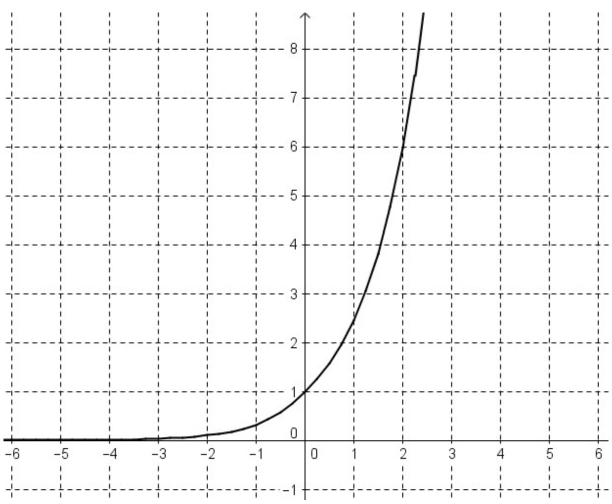
Pour un pas de 1 :



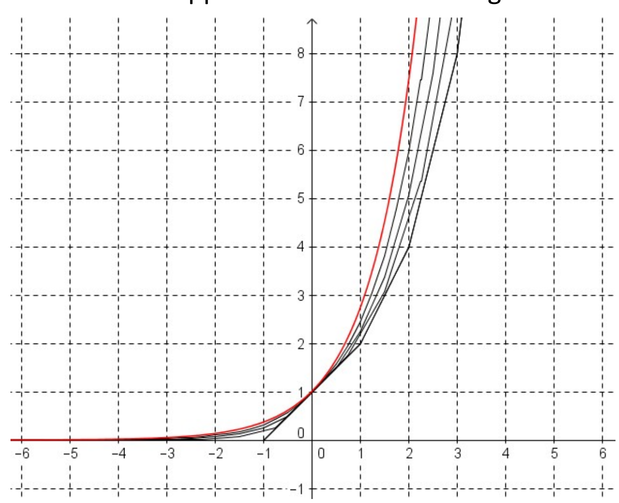
Pour un pas de 0,5 :



Pour un pas de 0,25 :



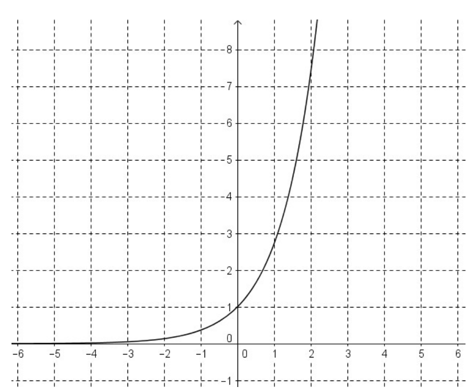
Lorsque le pas se rapproche de 0, la courbe se rapproche de la courbe rouge



Observation de la courbe et lecture des propriétés

Exercice 2 :

Observer la courbe de la fonction exponentielle et compléter toutes les propriétés présentes à côté :



Valeurs : $e^0 =$……. et $e \simeq$…….

Signe : La fonction exponentielle est ……………………………………………….

Variations : La fonction exponentielle est ……………………………………….

Calculs avec une exponentielle

Exercice 3 :
Simplifier au maximum les écritures des nombres suivants :

$A = e^3 e^4$ $\quad$ $B = e^7 e^3$ $\quad$ $C = e^1 e^8$ $\quad$ $D = e.e^6$ $\quad$ $E = e^2 e^5 + e^7$

$F = \frac{e^{10}}{e^8}$ $\quad$ $G = \frac{e^5}{e^9}$ $\quad$ $H = \frac{e^4 e^6}{e^2}$ $\quad$ $I = \frac{e^5 e^2}{e^6} - e^9 e^{11}$ $\quad$ $J = e^6(e^2 + e^5 - 3)$

$K = 3e^2 e^8$ $\quad$ $L = 3 + e^3 e^4$ $\quad$ $M = 2\frac{e^5 e^6}{e^3}$ $\quad$ $N = (e^3)^4$ $\quad$ $P = (e^2)^3 e^5$

Exercice 4 :
Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$A(x) = e^{3x+2} e^2$ $\quad$ $B(x) = e^{12} e^{6+3x}$ $\quad$ $C(x) = e^{4x-2} e^{5-2x}$ $\quad$ $D(x) = e^{x^2+2x-3} e^{-x^2-x}$

$E(x) = e^{x^2+2x-3} e^{-x^2} - x$ $\quad$ $F(x) = \frac{e^{x-5}}{e^{x-4}}$ $\quad$ $G(x) = \frac{e^{x-5} e^{2-2x}}{e^{x-4}}$ $\quad$ $H(x) = \frac{e^{2x} e^{-2x}}{e^4}$

$I(x) = 2\frac{e^{x-5} e^{2-2x}}{e^{x-4}} + 3e^{5x}$ $\quad$ $J(x) = \frac{e^x}{e^{-2}} + 3 + 4e^{2x} e^{5x} - 4e^6$ $\quad$ $K(x) = \frac{(e^{2x})^3}{e^5}$

Exercice 5 :
Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$f(x) = e^x + 5e^x$ $\quad$ $g(x) = xe^{2x} + 3e^{2x}$ $\quad$ $h(x) = 2xe^{3x} - 2e^{3x} + 6e^{3x}$

$f(x) = xe^x + e^x$ $\quad$ $g(x) = (x+1)e^{3x+1} - 2e^{3x+1}$ $\quad$ $h(x) = 5e^{5x-3} + (2x+6)e^{5x-3}$

$f(x) = 4e^{2x} - 5e^{3x+1}$ $\quad$ $g(x) = 2(x+3)e^{3x} - 5e^{3x}$ $\quad$ $h(x) = e^{2x+1} - (x+4)2e^{2x+1}$

$f(x) = (e^x)^2 - 3e^{2x}$ $\quad$ $g(x) = (3xe^x)^3 + 2e^{3x}$

Résolutions d'équations et d'inéquations

Exercice 6 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1)\ e^{3x-9} = 1$ $\quad$ $(E_2)\ e^x = e^{2x-1}$ $\quad$ $(E_3)\ e^{6-x} - e^{5x} = 0$

$(E_4)\ 1 - e^{6x} = 0$ $\quad$ $(E_5)\ e^{2x^2-x-4} - e^{-x^2+2x+2} = 0$

Exercice 7 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$(I_1)\ e^{3x-9} \leq 1$ $\quad$ $(I_2)\ e^{2x} > e^{x-1}$ $\quad$ $(I_3)\ e^{9-3x} - e^{4x} = 0$

$(I_4)\ 1 - e^{5-x} < 0$ $\quad$ $(I_5)\ e^{x^2+x-1} - e^{-6x-11} = 0$

Exercice 8 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les « équations et inéquations produits » suivantes :

$(E_1)\ (2x+1)e^{3x+1} = 0$ $\quad$ $(E_2)\ (5x-10)e^{9-x} = 0$ $\quad$ $(E_3)\ (2x+4)e^x - 3e^x = 0$

$(I_1)\ (6-x)e^{6x} > 0$ $\quad$ $(I_2)\ 6xe^{x-1} < 3e^{x-1}$ $\quad$ $(I_3)\ (x^2-1)e^{2x} \geq 0$

Exercice 9 : (Changement de variable)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(E) \qquad 4e^{2x} + 4e^{x} - 8 = 0$$

Calculs de dérivées

Exercice 10 :

Déterminer les expressions des dérivées des fonctions suivantes définies pour tout réel x par :

a. $f(x) = e^{3x}$

b. $g(x) = 4e^{5x+1}$

c. $h(x) = 3xe^{4-x}$

d. $t(x) = (2x+5)e^{x}$

e. $f(x) = (6-3x)e^{2x+15}$

f. $g(x) = e^{2x} + 2e^{5x+6}$

g. $h(x) = 3x + 5e^{3-2x}$

h. $t(x) = x - 4e^{8x+3}$

i. $f(x) = (1-x^2)e^{-x} + 5$

j. $h(x) = \frac{2e^{x}}{e^{x}+1}$

k. $g(x) = \frac{5e^{3x-2}}{4x+e^{5-6x}}$

Suite géométrique

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = 5e^{3x}$.

Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = f(n)$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Exprimer pour tout entier naturel n, u_{n+1} en fonction de u_n. Que peut-on en déduire ?

Identification de courbes

Exercice 12 :

Sur le graphique ci-dessous sont tracées les courbes des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ dont les expressions sont ci-dessous. Identifier chacune des courbes sur le graphique.

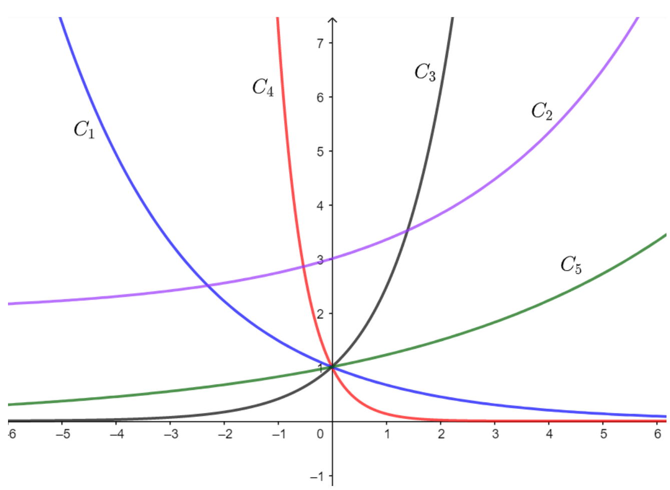
a. $f(x) = e^{0,2x}$

b. $g(x) = e^{-0,4x}$

c. $h(x) = 2 + e^{0,3x}$

d. $t(x) = e^{0,9x}$

e. $u(x) = e^{-2x}$



Exercices d'études de fonctions

Exercice 13 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$
On note C_f la courbe de la fonction f.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x - 1$
   a. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   b. Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   c. Justifier que, pour tout réel x, $e^x - x$ est strictement positif.
2. Étudier le sens de variation de f, et dresser le tableau de variations de f.
3. On note T_0 la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
   a. Déterminer l'équation réduite de T_0.
   b. Étudier la position relative de C_f par rapport à T_0.

Exercice 14 : [Sujet Banque E3C]

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[-5\,;5]$ par : $g(x) = e^x - x + 1$

1. On admet que g est dérivable sur l'intervalle $[-5\,;5]$ et on note g' sa fonction dérivée.
   Calculer $g'(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[-5\,;5]$.
3. Démontrer que g est strictement positive sur $[-5\,;5]$.

Soit f la fonction définie sur $[-5\,;5]$ par : $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$

On appelle C_f sa courbe représentative dans un repère du plan. On admet que f est dérivable sur $[-5\,;5]$ et on note f' sa fonction dérivée.

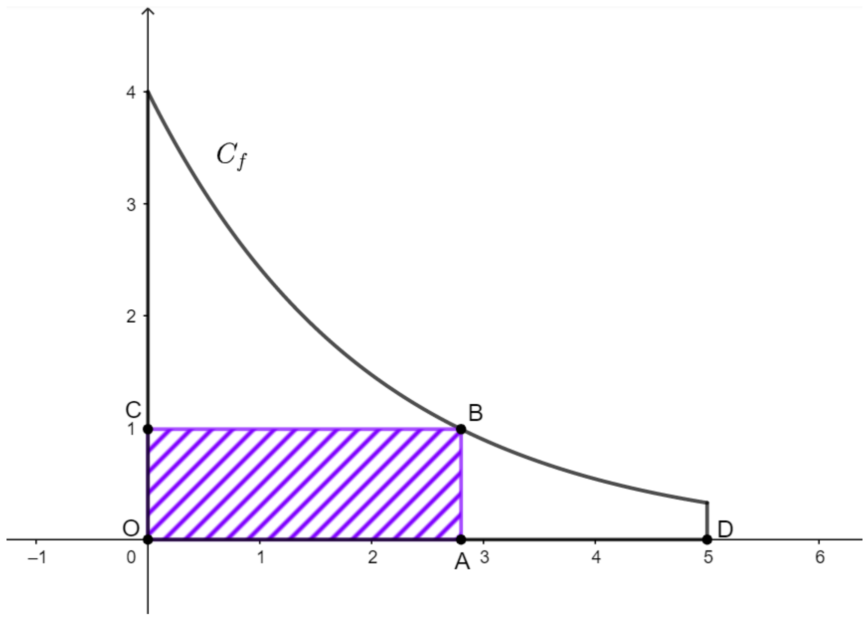
4. Démontrer que pour tout réel x de $[-5\,;5]$, $f'(x) = \frac{1}{e^x} \times g(x)$
   En déduire les variations de f sur l'intervalle $[-5\,;5]$.
5. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

Exercice 15 : [Sujet Banque E3C]

Un propriétaire souhaite construire un enclos rectangulaire sur son terrain.

Celui-ci est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé, d'unité le mètre.

Il est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 5$ et la courbe C_f représentative de la fonction f définie sur $[0\,;5]$ par $f(x) = 4e^{-0,5x}$.



L’enclos est représenté par le rectangle $OABC$ où O est l’origine du repère et B un point de C_f, A et C étant respectivement sur l’axe des abscisses et l’axe des ordonnées.

On note x l’abscisse du point A et D le point de coordonnées $(5\,;0)$.

Le but de l’exercice est de déterminer la position du point A sur le segment $[OD]$ permettant d’obtenir un enclos de superficie maximale.

1. Justifier que la superficie de l’enclos, en m^2, est donnée en fonction de x par $g(x) = 4xe^{-0,5x}$ pour x dans l’intervalle $[0\,;5]$.
2. La fonction g est dérivable sur $[0\,;5]$.
   Montrer que, pour tout réel x de l’intervalle $[0\,;5]$, on a $g'(x) = (4-2x)e^{-0,5x}$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $[0\,;5]$.
4. Où doit-on placer le point A sur $[OD]$ pour obtenir une superficie d’enclos maximale ?
   Donner la superficie maximale possible en arrondissant le au dm^2.

Exercice 16 : [Sujet Banque E3C]

Une entreprise fabrique des pièces en acier, toutes identiques, pour l’industrie aéronautique.

Ces pièces sont coulées dans des moules à la sortie du four. Elles sont stockées dans un entrepôt dont la température ambiante est maintenue à $25°C$.

Ces pièces peuvent être modelées dès que leur température devient inférieure ou égale à $600°C$ et on peut les travailler tant que leur température reste supérieure ou égale à $500°C$.

La température de ces pièces varie en fonction du temps.

On admet que la température en degré Celsius de ces pièces peut être modélisée par la fonction f définie sur l’intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = 1375e^{-0,075t} + 25$$

où t correspond au temps, exprimé en heures, mesuré après la sortie du four.

1. Calculer la température des pièces à la sortie du four.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'exercice ?
3. Les pièces peuvent-elles être modelées 10 heures après la sortie du four ? Après 14 heures ?
4. On souhaite déterminer le temps minimum d'attente en heures après la sortie du four avant de pouvoir modeler les pièces.
   a. Compléter l'algorithme suivant, pour qu'il renvoie ce temps minimum d'attente en heure (arrondi par excès à 0,1 près).

```
from math import exp
def f(t):
  return 1375*exp(-0.075*t)+25

def seuil():
  t=...
  temperature=...
  while temperature>... :
    t=t+0.1
    temperature=...
  return t
```

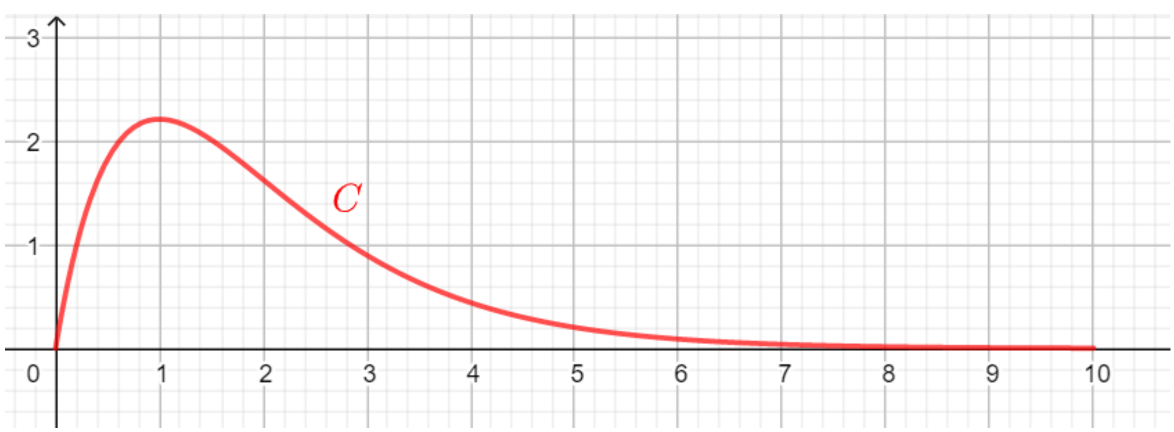
   b. Déterminer ce temps minimum d'attente. On arrondira au dixième.

Exercice 17 : [Sujet Banque E3C]

On procède, chez un sportif, à l'injection intramusculaire d'un produit. Celui-ci se diffuse progressivement dans le sang. On admet que la concentration de ce produit dans le sang (exprimée en mg/L =milligramme par litre) peut être modélisée par la fonction f, définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$f(x) = \frac{6x}{e^x}$, où x est le temps exprimé en heure.

Sa courbe représentative C est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.



1. Montrer que pour tout $x \in [0; 10]$, la fonction dérivée de f, notée f', a pour expression :

$$f'(x) = \frac{6-6x}{e^x}$$

2. Étudier le signe de f' sur $[0\,;10]$, puis en déduire le tableau de variations de f sur $[0\,;10]$.

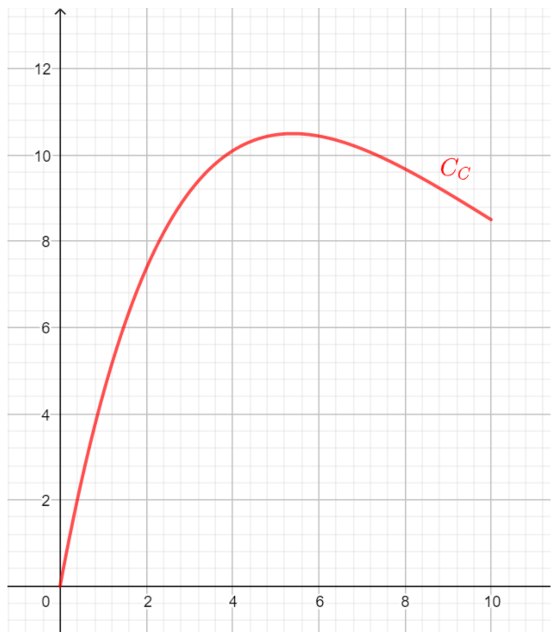
3. Quelle est la concentration maximale du médicament dans le sang ? (on donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-1} près).
   Au bout de combien de temps est-elle atteinte ?
4. Ce produit fait l'objet de réglementation par la fédération sportive : un sportif est en infraction si, au moment du contrôle, la concentration dans le sang du produit est supérieure à $2mg/L$.
   Le sportif peut-il être contrôlé à tout moment après son injection ? Expliquer votre raisonnement en vous basant sur l'étude de la fonction et/ou une lecture graphique sur la courbe C.

Exercice 18 : [Sujet Banque E3C]

Une entreprise fabrique chaque jour x tonnes d'un produit. Le coût total mensuel, en milliers d'euros, pour produire chaque jour x tonnes de ce produit est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$C(x) = (5x - 2)e^{-0,2x} + 2$$

On a représenté ci-dessous la courbe C_C de la fonction C dans un repère.



1. Par lecture graphique, donner une estimation de la quantité journalière de produit pour laquelle le coût total mensuel est maximal.
2. Le coût marginal C_m, qui correspond au supplément de coût total pour la production d'une unité de valeur supplémentaire, est assimilé à la dérivée de la fonction coût total.
   a. Démontrer que le coût marginal C_m est défini sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :
   $$C_m(x) = (-x + 5,4)e^{-0,2x}$$
   b. Pour quelle quantité de produit fabriqué par jour le coût marginal est-il négatif ?
   c. Donner le tableau de variations de la fonction C sur l'intervalle $[0\,;10]$.
   d. Déterminer le coût mensuel maximal sur l'intervalle considéré. On donnera la valeur arrondie à l'euro près.

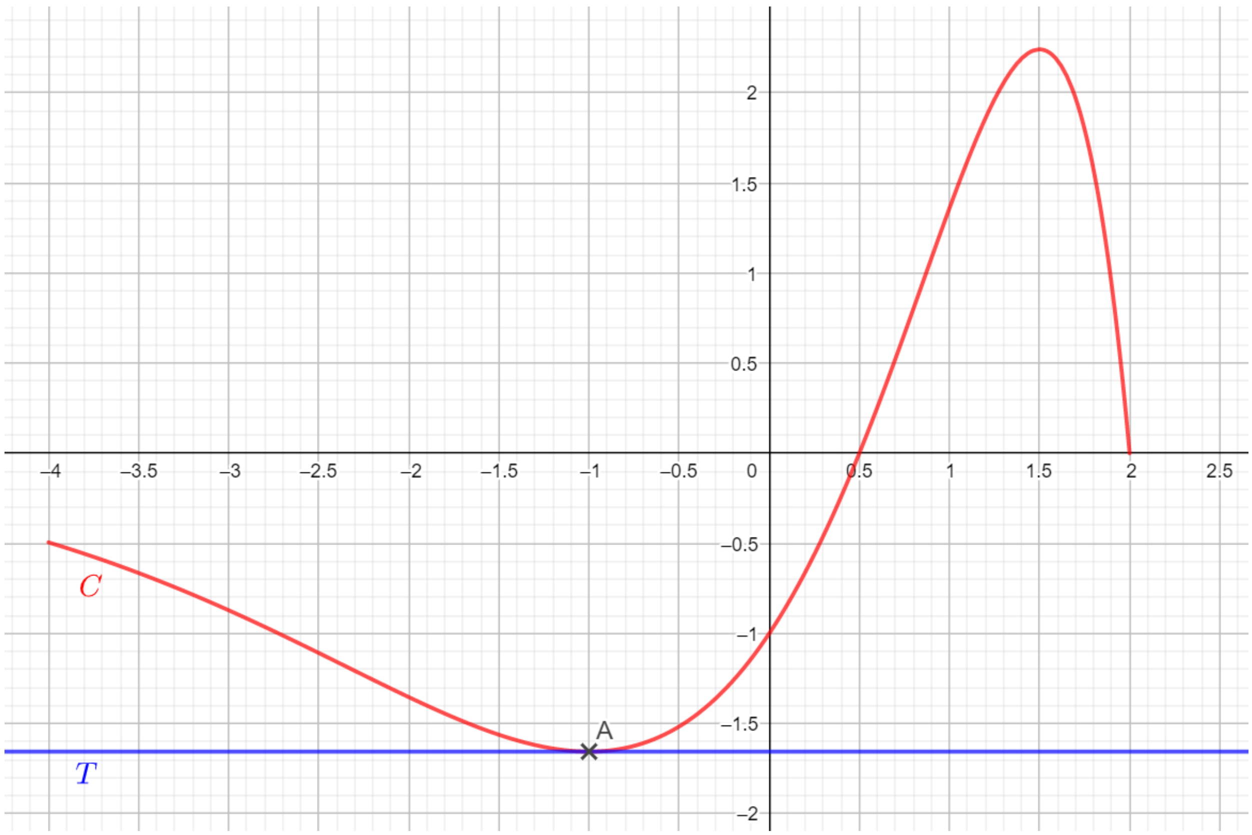
Exercice 19 : [Sujet Banque E3C]

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;2]$. La fonction dérivée de f est notée f'.

Dans le repère orthonormé ci-dessous, la courbe C est la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-4\,;2]$.

Le point A est le point de la courbe C d'abscisse -1.

La droite T est la tangente à la courbe C en A.



1. Par lecture graphique, donner la valeur de $f'(-1)$.
2. Résoudre, graphiquement, l'inéquation $f'(x) \leq 0$.

On admet que la fonction f est définie sur $[-4\,;2]$ par $f(x) = (-x^2 + 2{,}5x - 1)e^x$.

3. Vérifier que, pour tout x de l'intervalle $[-4\,;2]$,

$$f'(x) = (-x^2 + 0{,}5x + 1{,}5)e^x$$

4. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[-4\,;2]$.
5. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[-4\,;2]$.

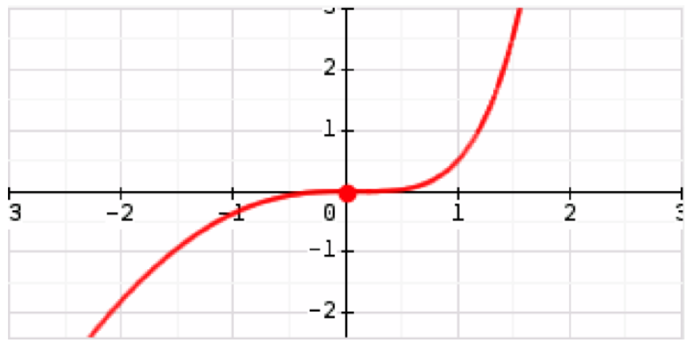
Exercice 20 : [Adaptation BAC S Pondichéry 2003]

On considère la fonction f définie sur $[-10\,;\,10]$ par :

$$f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$$

Partie A : Conjectures

Le graphique ci-dessous est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthogonal.



À l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant :

a. Le sens de variation de f sur $[-10\,;\,10]$.
b. La position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses ?

Partie B : Validation ou non de la première conjecture

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x \in [-10\,;\,10]$, et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur $[-10\,;\,10]$ par $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.
2. Étude du signe de $g(x)$ pour tout réel x.
   a. On admet que g est dérivable sur $[-10\,;\,10]$. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x.
   En déduire le tableau de variation de la fonction g.
   b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $[-10\,;\,10]$. On note α cette solution. Montrer que $0{,}20 < \alpha < 0{,}21$.
   c. Déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs de x.
3. Sens de variations de la fonction f sur $[-10\,;\,10]$.
   a. Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
   b. En déduire le sens de variations de f.
   c. Que pensez-vous de la première conjecture ?

Partie C : Validation ou non de la deuxième conjecture

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan.

1. Montrer que $f(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.
2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $h(x) = \frac{-x^3}{2(x+2)}$.
   a. Calculer $h'(x)$ pour $x \in [0\,;1]$, puis déterminer le sens de variations de h sur $[0\,;1]$.
   b. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3. Position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses.
   a. Montrer qu'il y a deux points d'intersection de C avec l'axe des abscisses. On notera β l'abscisse de celle qu'on ne sait pas déterminer par le calcul en classe de première.
   b. Préciser alors la position de la courbe C par rapport à l'axe des abscisses.
   c. Que pensez-vous de la deuxième conjecture ?