

Chapitre 5

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Point histoire

Pendant longtemps, la continuité a été considérée comme évidente lorsqu'on parle d'une fonction. Le théorème des valeurs intermédiaire est apparu en 1594 dans un ouvrage de Simon STEVIN (1548 - 1620), mais il ne fait pas référence à la continuité, considérée comme ne pouvant pas être autrement de manière intuitive.

Par la suite, Joseph-Louis LAGRANGE (1736 - 1813) et Carl Friedrich GAUSS (1777 - 1855), en 1799, utilisent également le TVI de manière intuitive pour démontrer le théorème de d'ALEMBERT. Ce sont Bernard BOLZANO (1781 - 1848) et Augustin Louis CAUCHY (1789 - 1857) qui ont cherché les premiers à formaliser la notion de continuité. C'est enfin Karl WEIERSTRASS (1815 - 1897 ci-contre) qui donnera une définition sous la forme connue de nos jours.

1 Continuité en un réel a :

1.1 Définition :

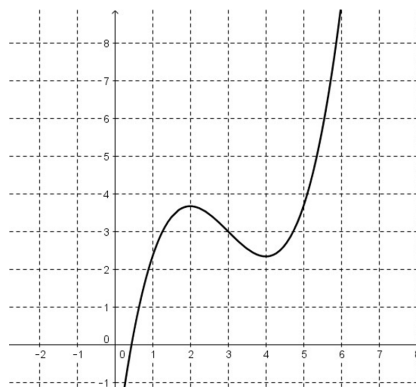
Définition 1

Soient f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et un réel $a \in I$.

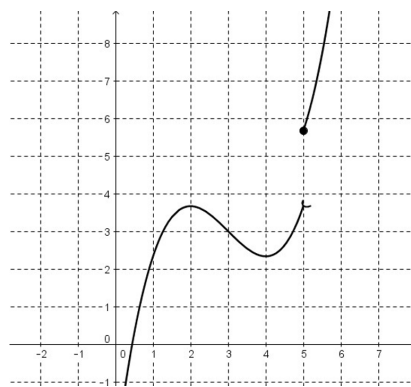
La fonction f est continue en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et est égale à $f(a)$.

Exemples

Chacune des courbes suivantes représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



f est continue en 5



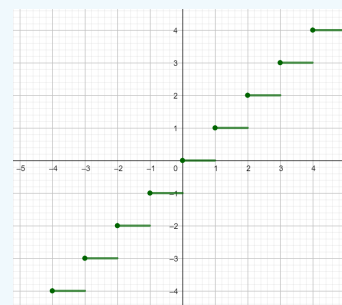
f n'est pas continue en 5

1.2 Exemple d'une fonction non continue à connaître : « Partie entière »

Définition 2 – Fonction partie entière

La fonction partie entière est la fonction qui associe à tout nombre réel x , l'entier relatif inférieur (ou égal) le plus proche.

L'image d'un réel x est notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$



Exemples

$$\lfloor 3,8 \rfloor = 3$$

$$\lfloor -3,8 \rfloor = -4$$

$$\lfloor 9 \rfloor = 9$$

Propriété 1

La fonction partie entière est discontinue en tous les entiers relatifs.

2 Continuité sur un intervalle :

2.1 Définition :

Définition 3 – Fonction continue sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

f est continue sur I si et seulement si f est continue pour toute valeur $a \in I$.

Définition 4

Les fonctions usuelles vues depuis la seconde sont toutes continues sur tout intervalle inclus dans leurs ensembles de définition.

2.2 Montrer qu'une fonction est continue sans utiliser la définition :

Propriété 2 – Continuité par opération algébrique

Soient f et g deux fonctions continues définies sur un même intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$.

- La fonction $f + g$ est continue sur I .
- La fonction $k.f$ est continue sur I .
- La fonction $f.g$ est continue sur I .
- Si pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .

Exemple

Justifier que la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On remarque que $f = \frac{1}{g}$ avec g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = x^2 + x + 1$.

La fonction g est à image dans $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fonction polynomiale du second degré à discriminant $\Delta > 0$, et coefficient dominant $a > 0$ et g est continue sur $\mathbb{R}$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$

Théorème 1 – Continuité par dérivabilité – Admis

Toute fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est continue sur cet intervalle.

Remarque

Attention, la réciproque de ce théorème est fausse. Contre-exemples :

- la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0.
- la fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas dérivable en 0.

Propriété 3

Soient g et h deux fonction définies respectivement sur I et J telles que pour tout $x \in I$, $g(x) \in J$.
Si g et h sont continues sur leurs intervalles respectifs, alors $h \circ g$ est continue sur I .

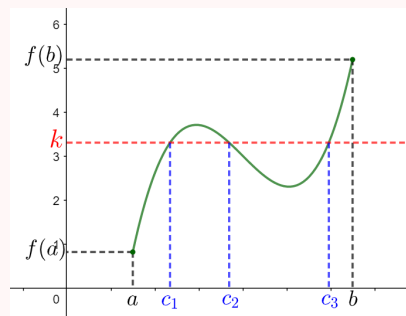
3 Théorème des valeurs intermédiaires :**Théorème 2 – Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) – Admis**

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction définie sur un intervalle $[a; b] \subset \mathbb{R}$.

Si :

- f est continue sur $[a; b]$,
- k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

alors il existe un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

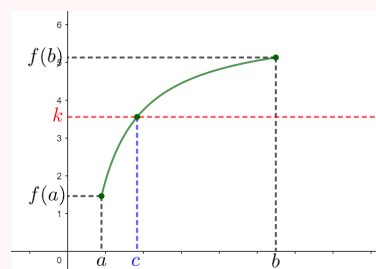
**Théorème 3 – Théorème de la bijection (Corollaire du TVI) – Admis**

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction définie sur un intervalle $[a; b] \subset \mathbb{R}$.

Si :

- f est continue sur $[a; b]$,
- f est strictement monotone sur $[a; b]$,
- k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

alors il existe un **unique** réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.



Remarque

Dans le cas d'un intervalle ouvert $]a; b[$ ou semi-ouvert $]a; b]$ ou $[a; b[$, on peut raisonner avec un intervalle fermé inclus dans le premier ou utiliser les limites de la fonction aux bornes de l'intervalle.

Méthode 1 – Utilisation du théorème de la bijection

Soit f une fonction définie sur $[-5; +\infty[$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	-5	2	$+\infty$
Variations de f	3	-4	$+\infty$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[-5; +\infty[$.

Sur $[-5; 2]$:

- f est continue sur $[-5; 2]$;
- f est strictement décroissante sur $[-5; 2]$;
- $f(2) = -4$ et $f(-5) = 3$ et $0 \in [-4; 3]$;

Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-5; 2]$.

Sur $[2; +\infty[$:

- f est continue sur $[2; +\infty[$;
- f est strictement décroissante sur $[2; +\infty[$;
- $f(-5) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $0 \in [-4; +\infty[$;

Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[2; +\infty[$.

DONC l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[-5; +\infty[$.

4 Image d'une suite convergente par une fonction continue :**Théorème 4 – Intervern limite/fonction**

Soit (u_n) une suite numérique à valeurs dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, qui converge vers une limite $\ell \in I$.
Soit f une fonction définie et continue sur I .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = f(\ell)$$

Théorème 5 – Conséquence – Théorème du point fixe

Soit (u_n) une suite numérique à valeurs dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, qui converge vers une limite $\ell \in I$.
 Soit f une fonction définie et continue sur I , telle que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
 La limite ℓ de la suite (u_n) est solution de l'équation :

$$\ell = f(\ell)$$

Preuve

Soit (u_n) une suite numérique à valeurs dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, qui converge vers une limite $\ell \in I$.
 Soit f une fonction définie et continue sur I , telle que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
 D'après le théorème d'interversion limite/fonction,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = f(\ell)$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$$

Donc

$$\ell = f(\ell)$$

□

Méthode 2 – Déterminer la limite d'une suite à partir de la formule de récurrence

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = 6u_n - 10 \text{ et } u_0 = 1$$

On admet que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , déterminer la limite de la suite (u_n) .

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction affine définie pour tout réel x par $f(x) = 6x - 10$.

- Rédaction 1 :
 f est continue sur $\mathbb{R}$,
 Donc d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $\ell = f(\ell)$.

- Rédaction 2 :
 f est continue sur $\mathbb{R}$,
 Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = f(\ell)$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$$

Donc

$$\ell = f(\ell)$$

Résolution de l'équation $\ell = f(\ell)$:

$$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = 6\ell - 10 \Leftrightarrow \ell - 6\ell = -10 \Leftrightarrow -5\ell = -10 \Leftrightarrow \ell = 2$$

Donc la suite (u_n) converge vers 2.

Méthode 3 – Conjecturer l'éventuelle limite d'une suite à l'aide du graphique de la fonction f associée à sa formule de récurrence

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

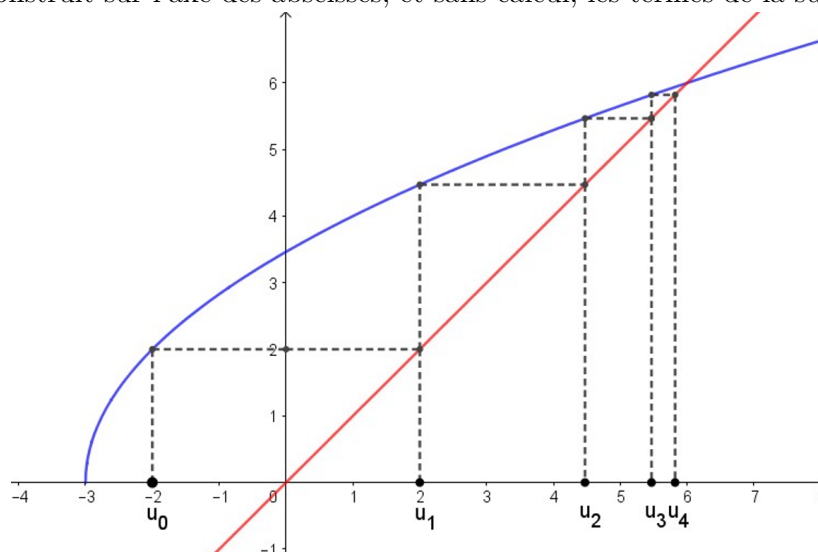
$$u_{n+1} = 2\sqrt{u_n + 3}$$

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction définie pour tout $x \in [-3; +\infty[$ par

$$f(x) = 2\sqrt{x + 3}$$

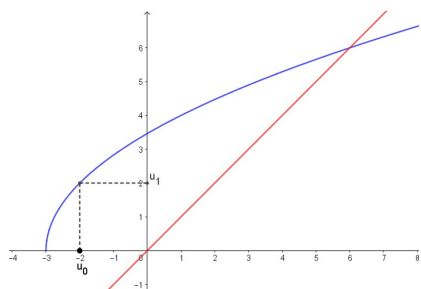
Sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f est représentée en bleu et la droite rouge est la droite d'équation $y = x$.

On a construit sur l'axe des abscisses, et sans calcul, les termes de la suite (u_n) .

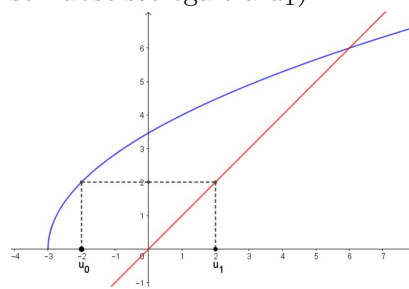


Détails de la construction :

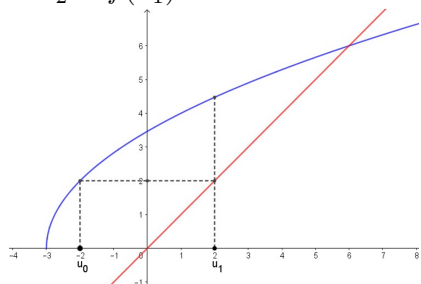
Étape 1 : on place u_0 sur l'axe des abscisses et on construit u_1 comme image de u_0 car $u_1 = f(u_0)$.



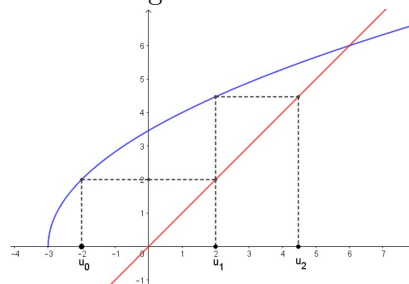
Étape 2 : on « ramène » u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite rouge puisque sur cette droite : $y = x$ (donc le point de cette droite dont l'ordonnée est u_1 a également son abscisse égale à u_1).



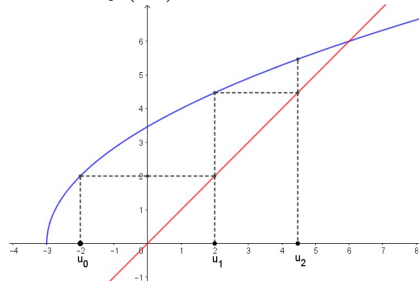
Étape 3 : on construit u_2 en construisant l'image de u_1 par f car $u_2 = f(u_1)$.



Étape 4 : on « ramène » u_2 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite rouge.



Étape 5 : on construit u_3 en construisant l'image de u_2 par f car $u_3 = f(u_2)$.



Étape 6 : on « ramène » u_3 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite rouge.

