

CB2 - Épreuve 1

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Veillez à laisser un espace suffisant pour accueillir mes commentaires. Vous êtes invités à **encadrer** les résultats de vos calculs, et à **numéroter** vos pages.

Conseils

- Numérotez vos pages de la façon : numéro de la page / nombre total des pages.
- Encadrez vos résultats.
- Lisez tout l'énoncé de façon active mais sans réfléchir profondément à chaque question (5 minutes), ceci afin de repérer les enjeux de chaque question (cours, calcul, recherche?).
- Pensez à bien quantifier tout objet manipulé.
- Faites *bien* ce que vous savez faire.
- Évitez les confusions d'objets.

Exercice 1 (EDHEC ECE 2019)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I .

1. (a) Déterminer $(A - I)^2$.
(b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A .
2. On pose $A = N + I$.
(a) Exprimer pour tout entier naturel n , la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N , puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A .
(b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.
3. On pose $u_1 = (f - Id)(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
(a) Montrer que le rang de $f - Id$ est égal à 1.
(b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\text{Ker}(f - Id)$.
4. (a) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

5. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis montrer que $A = PTP^{-1}$.

6. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout (i, j) de $\llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne qui vaut 1.

(a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T , c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

(b) Soit N une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$

(c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille :

$$(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}).$$

Exercice 2 (EDHEC ECE 2019)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Une urne contient une boule noire non numérotée et $n - 1$ boules blanches, dont $n - 2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.

Pour chaque i de $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, on note B_i l'événement : « le i -ème tirage donne une boule blanche », on pose $\bar{B}_i = N_i$ et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X .

2. (a) Pour tout i de $\llbracket 2, n - 1 \rrbracket$, justifier que $P_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}$.

(b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $P(X = k)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

(c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.

(a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :

$$P([X = k] \cap [Y = 0]) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

(b) En déduire $P(Y = 0)$.

(c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

4. Simulation informatique.

On rappelle qu'en **Python**, la commande `rd.randint(a, b+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$.

(a) Compléter le script **Python** suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X .

On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre `nB+1`, où `nB` désigne le nombre de boules blanches.

```

1 n=int(input('entrez une valeur pour n : '))
2 nB=n-1
3 X=1
4 u=rd.randint(1,nB+2)
5 while u<nB+1 :
6     nB=_____
7     u=rd.randint(1,-----)
8     X=_____
9 print('la boule noire est apparue au tirage numero',X)

```

- (b) Compléter les lignes 4 et 8 ajoutées au script précédent afin que le script qui suit renvoie et affiche, en plus de celle prise par X , la valeur prise par Y .

```

1 n=int(input('entrez une valeur pour n : '))
2 nB=n-1
3 X=1
4 Y=_____
5 u=rd.randint(1,nB+2)
6 while u<nB+1 :
7     nB=_____
8     if u==1 :
9         Y=_____
10    u=rd.randint(1,-----)
11    X=_____
12 print('la boule noire est apparue au tirage numero',X)
13 print('la valeur de Y est ',Y)

```

Exercice 3 (EML ECS 2018)

On définit la fonction I d'une variable réelle x par : $I(x) = \int_0^1 \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

Partie I : Étude d'une suite d'intégrales

On pose, pour tout k de $\mathbb{N}$, $W_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(u))^k du$.

1. Calculer les intégrales W_0 et W_1 .

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer : $W_k - W_{k+2} = \frac{1}{k+1} W_{k+2}$.

(b) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $W_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \frac{\pi}{2}$.

Partie II : Une autre expression de $I(x)$

1. Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge et que $\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt = W_k$.

Pour cela, on pourra utiliser le changement de variable $t = \sin(u)$ après avoir justifié sa validité.

2. (a) Montrer que la fonction I est définie sur $\mathbb{R}$ et préciser sa parité.

(b) Donner la valeur de $I(0)$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

(a) Soient $t \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ appliquée à la fonction $u \mapsto e^u + e^{-u}$ entre 0 et xt , montrer :

$$\left| e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^n \frac{2(xt)^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^x.$$

(b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\left| I(x) - \sum_{k=0}^n \frac{2x^{2k}}{(2k)!} W_{2k} \right| \leq \frac{x^{2n+1}\pi}{2(2n+1)!} e^x.$

(c) En déduire que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$ converge et que l'on a : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{1}{\pi} I(x).$

Problème (EDHEC ECE 2018)

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2) dt$.

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie 1 : étude de f

- 1)
 - a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x .
 - b) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
 - c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).
- 2)
 - a) Montrer que f est impaire.
 - b) Etudier la convexité de f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
- 3)
 - a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x , on a :

$$f(x) = x(\ln(1+x^2) - 2) + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

4) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est une intégrale convergente.

b) En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x \ln(1+x^2)$.

c) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x \ln(x)$$

d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

5) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

a) Montrer que f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f , c'est à dire :

$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + o(x^3)$$

b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. (on trouve $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}$)

Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt$.

6) a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?

b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f .

7) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

8) a) Etablir l'encadrement suivant :

$$0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$$

b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?

9) a) Montrer que :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt \leq \frac{u_n}{1 - \ln 2}$$

b) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt$.

c) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1 - (\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt$$

d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1 - \ln(1+t^2)} dt$$

e) Modifier le script présenté à la question 6) pour donner une valeur approchée de $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.