

TD 9 : Probabilité Sur Un Univers Fini

EXERCICE 9.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une épreuve aléatoire consiste à lancer n fois une pièce.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note P_k l'évènement "on obtient *Pile* lors du $k^{\text{ème}}$ lancer."

1. On note A_n l'évènement : "on obtient *Pile* lors de chacun des n lancers.
Écrire A_n en fonction des évènements P_k .
2. On note B_k l'évènement "le premier *Pile* apparaît lors du $k^{\text{ème}}$ lancer." et E_n l'évènement "le le premier *Pile* apparaît, au plus tard, lors du $n^{\text{ème}}$ lancer.
Écrire B_k en fonction des P_k puis E_n en fonction des évènements B_k .

EXERCICE 9.2

Une épreuve aléatoire consiste à tirer successivement, sans remise, deux cartes d'un jeu. On considère les évènements :

- A : " La première carte tirée est un coeur. "
- B : " La deuxième carte tirée est un coeur. "

Écrire en fonction de A et B les évènements :

- E : " Au moins une des deux cartes est un coeur. "
- F : " Une seule des deux cartes est un coeur. "

EXERCICE 9.3

Une épreuve aléatoire consiste à effectuer des lancers successifs d'un dé à six faces numérotées de 1 à 6.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A_k désigne l'évènement : "Le $k^{\text{ème}}$ lancer a fourni un six.

Écrire en fonction des évènements A_k les évènements :

- E_2 : " Le premier six a été obtenu lors du 2ème lancer. "
- E_5 : " Le premier six a été obtenu lors du 5ème lancer. "
- F_3 : " Le deuxième six a été obtenu lors du 3ème lancer. "
- F_5 : " Le deuxième six a été obtenu lors du 5ème lancer. "

EXERCICE 9.4

Soient E et F deux évènements d'un univers Ω .

Démontrer l'inégalité suivante :

$$P(E \cap F) \geq P(E) + P(F) - 1$$

EXERCICE 9.5

Soient E et F deux évènements d'un univers Ω .

1. Montrer que : $P(\overline{E} \cap F) = P(F) - P(E \cap F)$.
2. Montrer que : $P(F) - P(\overline{E} \cap F) = P(E) - P(E \cap \overline{F})$.

EXERCICE 9.6

Soient E et F deux évènements d'un univers Ω . On considère l'évènement A : " Un seul des évènements E et F se réalise."

1. Écrire A en fonction de E et F .
2. En déduire que :

$$P(A) = P(E) + P(F) - 2P(E \cap F).$$

EXERCICE 9.7

On extrait successivement trois cartes d'un jeu de 32 cartes, avec remise à chaque fois de la carte tirée.

1. Quelle est la probabilité que l'on obtienne 3 valets ?
2. Quelle est la probabilité que l'on obtienne 3 fois une carte de même valeur ?

EXERCICE 9.8

On extrait successivement trois cartes d'un jeu de 52 cartes, avec remise à chaque fois de la carte tirée.

Quelle est la probabilité qu'au moins une de ces cartes soit un valet ?

EXERCICE 9.9

On lance un dé équilibré deux fois de suite.

1. Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit de 8 ?
2. Pourquoi la probabilité calculée n'est pas tout simplement de $\frac{1}{11}$?

EXERCICE 9.10

Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$ ($n \geq 1$). On extrait au hasard une boule.

1. Quelle est la probabilité que le numéro obtenu soit inférieur ou égal à n ?
2. Quelle est la probabilité que le numéro soit pair ?
3. Reprendre les deux questions avec des boules numérotées de 0 à $2n$.

EXERCICE 9.11

1. Soient E et F deux évènements d'un univers Ω .
Démontrer l'inégalité suivante :

$$P(E \cup F) \leq P(E) + P(F)$$

2. (a) En déduire que, si A , B et C sont trois évènements alors :

$$P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C).$$

- (b) Etablir que si A , B et C sont équiprobables de même probabilité p et que $P(A \cap B \cap C) = 0$, alors on a $p \leq \frac{2}{3}$.

EXERCICE 9.12

On dispose d'une urne contenant 3 jetons noirs et 5 jetons rouges. On tire successivement et sans remise, deux jetons.

1. Quelle est la probabilité de tirer 2 jetons de couleurs différentes ?
2. Quelle est la probabilité que le deuxième jeton tiré soit noir ?

EXERCICE 9.13

On considère deux évènements A et B tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

1. Quelle est la valeur de $\mathbb{P}_A(B)$ si A et B sont incompatibles ?
2. Quelle est la valeur de $\mathbb{P}_A(B)$ si $A \subset B$?

EXERCICE 9.14

On dispose d'une urne contenant 4 jetons noirs et 7 jetons rouges. On tire successivement et sans remise, trois jetons.

1. Quelle est la probabilité de tirer 2 jetons rouges ?
2. Quelle est la probabilité tirer au moins un jeton rouge ?

EXERCICE 9.15

On dispose d'une urne contenant 5 jetons noirs et 3 jetons rouges. On tire successivement et sans remise, trois jetons.

On note, pour tout $n \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$:

- E_n l'évènement "Le premier jeton noir tiré est obtenu au $n^{\text{ème}}$ tirage",
 - B_n l'évènement "On obtient un jeton blanc au $n^{\text{ème}}$ tirage."
1. Exprimer E_1 , E_2 , E_3 et E_4 en fonction des certains des évènements B_k , puis donner leurs probabilités ?
 2. Pour tout $n \geq 5$, déterminer $P(E_n)$?

EXERCICE 9.16

On dispose de deux urnes U et V . L'urne U contient 5 boules noires et 3 boules blanches ; l'urne V contient 6 boules noires et 2 boules blanches.

1. On choisit au hasard une urne et on en extrait une boule.
 - (a) Quelle est la probabilité que cette boule soit noire?
 - (b) On constate que la boule est noire. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U ?
2. On choisit une urne au hasard et on en extrait des boules successivement et sans remise. Pour tout $n \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on note E_n l'évènement "La première boule noire est obtenue au $n^{\text{ème}}$ tirage" et B_n l'évènement "On obtient une boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage". Déterminer, pour tout $n \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, la probabilité $P(E_n)$.

EXERCICE 9.17

Soit n un entier naturel non nul.

On extrait successivement avec remise n boules d'une urne contenant une boule noire et une boule blanche.

Quelle est la probabilité qu'au moins l'une des boules tirées soit blanche ?

EXERCICE 9.18

On dispose d'un test sérologique permettant de savoir si un individu donné a été atteint par le covid-19. On a les données suivantes :

- 5% de la population testée a été atteinte par le covid-19.
 - Le test est fiable à 95 %, c'est-à-dire que 95% des personnes qui ont été atteintes par le virus présentent un test positif, et 95% de celles qui ne l'ont pas été présentent un test négatif.
1. Calculer la probabilité pour un individu donné d'avoir été effectivement atteint sachant qu'il a été testé positif.
 2. Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 9.19

On dispose de deux urnes U et V . L'urne U contient 3 boules blanches et 5 boules rouges ; l'urne V contient 7 boules blanches et 5 boules rouges.

On joue au jeu suivant : On lance deux dés non pipés.

- Si la somme des points obtenus est inférieure ou égale à 7, on choisit l'urne U .
- Si la somme des points obtenus est strictement supérieure à 7, on choisit l'urne V .

On tire alors 4 boules avec remise dans l'urne choisie.

1. Quelle est la probabilité que l'on n'obtienne que des boules rouges ?
2. On n'obtient que des boules rouges. Quelle est la probabilité que ce soit l'urne U qui ait été choisie ?
3. Comment modifier la condition de choix des urnes, à partir du total des points obtenus pour que la probabilité calculée à la question précédente soit inférieure ou égale à 5 ?

EXERCICE 9.20

Le jeu du Monty Hall opposait, dans les années 80, un présentateur à une personne candidate. La personne qui joue est placée devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre.

Elle doit tout d'abord désigner une porte. Puis le présentateur doit ouvrir une porte qui n'est ni celle choisie par la candidate, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait quelle est la bonne porte dès le début).

La personne qui joue a alors le droit d'ouvrir la porte qu'elle a choisie initialement, ou d'ouvrir la troisième porte.

Quelle devrait-être votre stratégie si vous participiez à ce jeu ?

EXERCICE 9.21

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On tire simultanément n boules.

1. Déterminer la probabilité que toutes les boules obtenues aient un numéro inférieur ou égal à k .
2. Déterminer la probabilité que le plus grand numéro obtenu soit k .
3. En déduire la relation :

$$\sum_{k=n}^N \binom{k-1}{n-1} = \binom{N}{n}$$

EXERCICE 9.22

On lance n boules sur une surface percée de n trous (chacun pouvant contenir une ou plusieurs boules).

Déterminer la probabilité des évènements :

1. A : " il y a une boule par trou. "
2. B : " il y a deux boules dans un trou et les boules restantes sont chacune dans un trou distinct. "

EXERCICE 9.23

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire successivement, sans remise, deux par deux, les boules de l'urne jusqu'à la vider.

1. Calculer la probabilité p_n d'avoir, à chaque tirage, des boules de couleur distincte.
2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$\frac{2^{2n-1}}{n} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$$

3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

EXERCICE 9.24

On considère deux évènements indépendants A et B .

1. Montrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.
2. Montrer que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

EXERCICE 9.25

On lance 2 dés identiques non truqués à six faces. On considère les évènements suivants :

A : "le 1^{er} donne un numéro impair. "

B : "le 2^{ème} donne un numéro impair."

C : "la somme obtenue par les deux dés est impaire."

Les évènements A , B et C sont-ils deux à deux indépendants ? Mutuellement indépendants ?

EXERCICE 9.26

On lance simultanément 3 dés identiques et non truqués à six faces.

On note a , b et c les résultats de chacun des dés.

On considère les évènements :

$$A = (b + c = 7), B = (a + c = 7) \text{ et } C = (a + b = 7)$$

1. Calculer $P(A)$ et $P(B \cup C)$.
2. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
3. Les évènements A , B et C sont-ils mutuellement indépendants ?
4. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
 - (a) Si un évènement est indépendant de deux autres alors il est indépendants de leur réunion.
 - (b) Si un évènement est indépendant de deux autres alors il est indépendants de leur intersection.

EXERCICE 9.27

Soient A et B deux évènements. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A et B sont indépendants
2. $P(A \cap B)P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A \cap \bar{B})P(\bar{A} \cap B)$

EXERCICE 9.28

1. Montrer l'inégalité de Boole :

$$\forall n \geq 1, P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

2. En déduire que, si trois évènements A, B, C sont équiprobables, de même probabilité p et que $P(A \cap B \cap C) = 0$ alors $p \leq \frac{2}{3}$.

EXERCICE 9.29

Dans une cour de récréation, n élèves se rangent par ordre croissant de taille (on suppose qu'il n'existe pas d'élèves distincts possédant la même taille).

On leur impose une permutation aléatoire et on note $A_{k,n}$ l'évènement " k élèves exactement n'ont pas changé de place".

1. Calculer les probabilités : $P(A_{n,n})$, $P(A_{n-1,n})$ et $P(A_{n-2,n})$.
On notera, pour la suite, E_i l'évènement "le i -ème élève du rangement initial n'a pas bougé".

2. Écrire l'évènement $\overline{A_{0,n}}$ en fonction de E_i . Donner alors $P(A_{0,n})$ sous forme de somme.

3. Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket, P(A_{k,n}) = \frac{1}{k!} P(A_{0,n-k})$$

En déduire $P(A_{k,n})$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

4. Calculer alors la somme :

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{k+j}{j} \frac{(-1)^j}{(k+j)!}$$