Chapitre 3

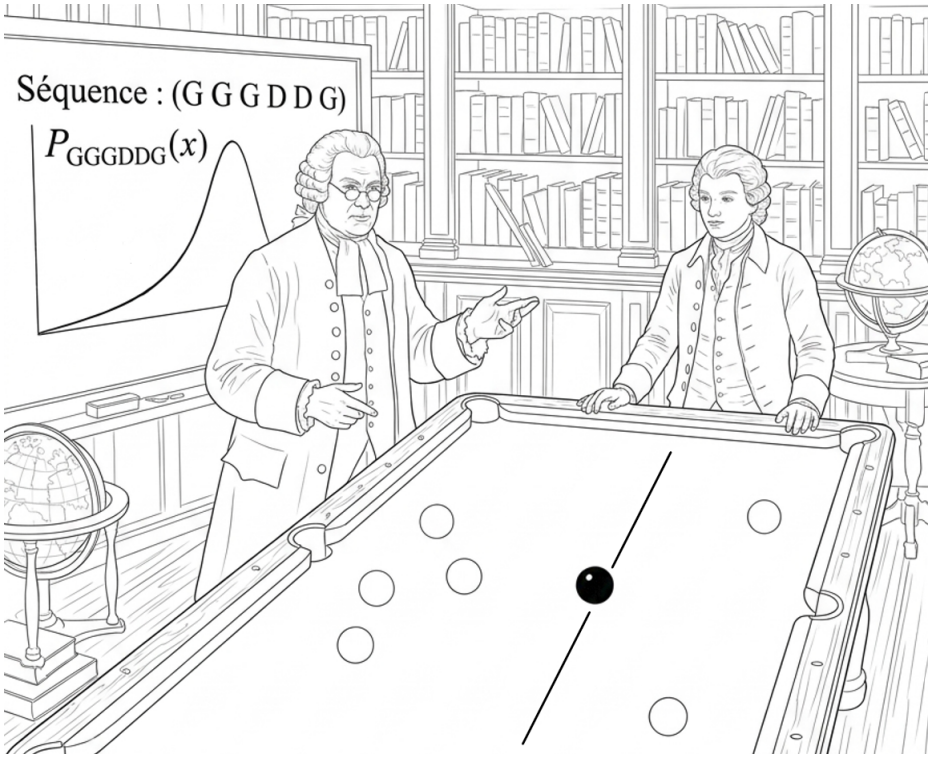
Probabilités conditionnelles et indépendance

Capacités attendues

- Dans des cas simples, calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales.
- Savoir utiliser ou justifier l'indépendance de deux évènements.
- Représenter la succession de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau.
- Pour $n \leqslant 4$, représenter l'arbre associé à la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques afin de calculer des probabilités.

Plan du cours

1 Probabilités conditionnelles : 2
2 Partition de l'univers et formule des probabilités totales : 3
2.1 Partition de l'univers : 3
2.2 Formule des probabilités totales : 4
3 Indépendance de deux événements : 4
4 Épreuve de Bernoulli, schéma de Bernoulli : 5



Histoire des mathématiques

Les probabilités conditionnelles apparaissent dans des travaux de Bayes et de Moivre, écrits en anglais au XVIIIe siècle, même si c'est Laplace (1749 - 1827) ci-contre, qui en a élaboré la notion. Les questions traitées par ces auteurs peuvent parfois surprendre (exemple : quelle est la probabilité que le soleil se lève demain, sachant qu'il s'est levé depuis le commencement du monde ?) ; néanmoins, les probabilités conditionnelles sont omniprésentes dans la vie courante et leur utilisation inappropriée mène facilement à de fausses affirmations. On peut considérer que les origines du « calcul des probabilités »remontent au XVIIe siècle. Pascal, Huygens, Moivre, Bernoulli, Euler, d'Alembert appliquent les notions de variable aléatoire et d'espérance à des problèmes issus de questions liées aux jeux, aux assurances et à l'astronomie. Ces dernières notions seront abordées dans un prochain chapitre.



1 Probabilités conditionnelles :

Le concept est le suivant :
Dans une population, je crée deux sous populations A et B. Si je me limite à la sous population A, quelle est la probabilité de choisir un individu de B.

Définition 1

Soient A et B deux événements avec A tel que $P(A) > 0$.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Théorème 1

Soient A et B deux événements avec A tel que $P(A) > 0$.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

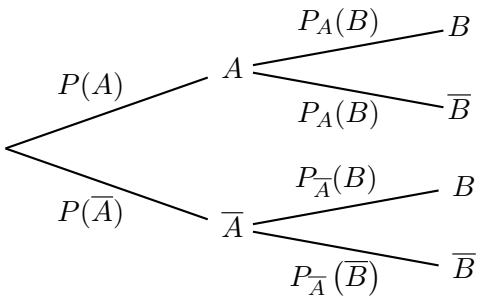
Preuve S

oient A et B deux événements avec A tel que $P(A) > 0$.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$
$$\text{Donc } P(A) \times P_A(B) = P(A \cap B)$$
$$\text{Donc } P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

□

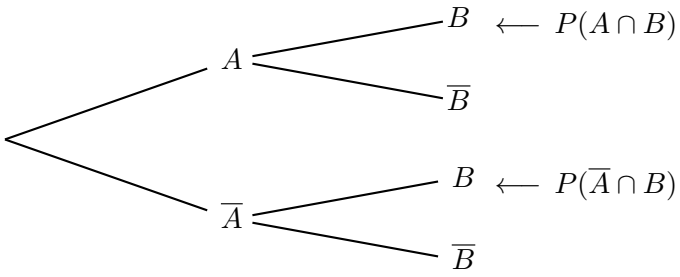
Construction de l'arbre de probabilité : « Règle du produit »



$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$
$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B})$$
$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$$
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B})$$

2 Partition de l'univers et formule des probabilités totales :

L'utilisation que nous en ferons cette année est la suivante :



$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

2.1 Partition de l'univers :

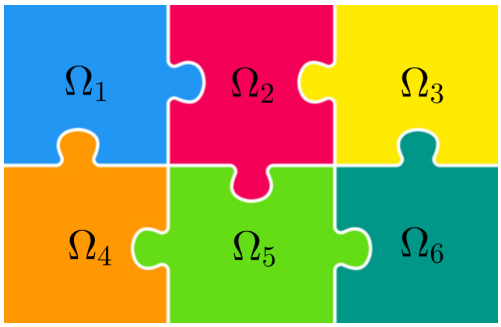
Définition 2 – Partition

Une famille d'événements $\{\Omega_1; \Omega_1; ...; \Omega_n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ est une partition de Ω si et seulement si :

- Pour tout i et j entiers naturels tels que $0 < i < j \leq n$: $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$
- $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup ... \cup \Omega_n = \Omega$

Exemple

En découpant un univers Ω à la manière d'un puzzle, on obtient une partition de Ω.
Ici, $\{\Omega_1; \Omega_2; \Omega_3; \Omega_4; \Omega_5; \Omega_6\}$ est une parition de Ω.



- Pour tout i et j entiers naturels tels que $0 < i < j \leq n$:

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$$

- $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4 \Omega_5 \cup \Omega_6 = \Omega$

2.2 Formule des probabilités totales :

Propriété 1 – Formule des probabilités totales

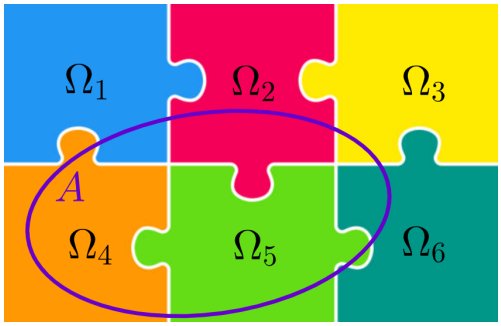
Soit Ω un univers muni d'une loi de probabilité P.
Soit $\{\Omega_1;\Omega_1;...;\Omega_n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ est une partition de Ω.
Soit A un événement de Ω.

$$P(A) = P(A \cap \Omega_1) + P(A \cap \Omega_2) + ... + P(A \cap \Omega_n)$$

Exemple

Soit $\{\Omega_1;\Omega_2;\Omega_3;\Omega_4;\Omega_5;\Omega_6\}$ est une parition de Ω.
Soit A un événement de Ω.

$$P(A) = P(A \cap \Omega_1) + P(A \cap \Omega_2) + ... + P(A \cap \Omega_6)$$



3 Indépendance de deux événements :

Définition 3

Soit P une loi de probabilité sur un univers Ω.
Deux événements A et B de l'univers sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

L'idée d'indépendance de deux événements A et B pour une loi de probabilité est que lorsqu'un des événements A ou B est réalisé, cela ne change en rien la probabilité que l'autre le soit.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$$

et

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$$

Exemple

On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes classique. $\Omega = \{\text{cartes}\}$
Soient A : « la carte choisie est une dame » et B : « la carte choisie est un cœur »
$A \cap B$ est donc l'événement : « la carte choisie est la dame de cœur »
La loi étant équirépartie sur les cartes :

- $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$
- $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ et $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ donc $P(A) \times P(B) = \frac{1}{13} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{52}$

donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
donc A et B sont indépendants.

Théorème 2

Si deux événements A et B sont indépendants pour une loi de probabilité P, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants pour la loi P.

Preuve

Nous voulons montrer que si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont aussi.
C'est à dire que si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, alors $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B})$.

D'après la formule des probabilités totales :

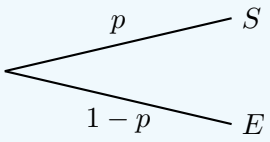
$$\begin{aligned} P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \text{ donc } P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \\ \text{donc } P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A) \times P(B) \text{ car } A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \\ &= P(A) \times (1 - P(B)) \\ &= P(A) \times P(\overline{B}) \end{aligned}$$

□

4 Épreuve de Bernoulli, schéma de Bernoulli :

Définition 4 – Épreuve de Bernoulli

On appelle épreuve de Bernoulli, toute expérience aléatoire qui ne possède que deux issues possibles : succès ou échec.
Une épreuve de Bernoulli est caractérisée par son paramètre p, qui correspond à la probabilité du succès.



Définition 5 – Schéma de Bernoulli

Une répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p est appelée schéma de Bernoulli de paramètre n et p.

Exemples

- On lance 4 fois de suite une pièce déséquilibrée dont la probabilité d'indiquer Pile est de 0,2.

  On choisi parmi les deux issues possibles (Pile ou Face) celle que nous considérerons comme le succès : Pile.

- Une urne contient 2 billes vertes et 8 billes rouges indiscernables au toucher.

  On choisit une bille au hasard, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avant de mélanger.

  On fait cela 4 fois de suite.

  On choisi parmi les deux issues possibles (vert ou rouge) celle que nous considérerons comme le succès : vert.

Ces deux situations correspondent à un même schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}2$, dont l'arbre de probabilité est représenté ci-après.

Arbre de probabilité pour un schéma de Bernoulli de paramètre $n = 4$ et $p = 0,2$:

